

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

INFLUENCE DE LA STRUCTURE INTERNE DES ÉCOULEMENTS  
DIPHASIQUES HORIZONTAUX SUR LE PARAMÈTRE DE  
DISTRIBUTION ET LE TAUX DE VIDE MOYEN

LAKDAR HAOUES

DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉNERGÉTIQUE)

JUILLET 2008

© Lakdar Haoues, 2008.



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-46055-9*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-46055-9*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

INFLUENCE DE LA STRUCTURE INTERNE DES ÉCOULEMENTS  
DIPHASIQUES HORIZONTAUX SUR LE PARAMÈTRE DE  
DISTRIBUTION ET LE TAUX DE VIDE MOYEN

Présenté par : HAOUES Lakdar

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. KOCLAS Jean, Ph.D., président

M. OLEKHNOVITCH Andrei, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TEYSSÉDOU Alberto, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. MUREITHI Njuki-William, Ph.D., membre

*Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux*

*A mes parents,*

*Mes sœurs,*

*Mes frères.*

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord du fond du cœur mes parents : Abdallah Haoues et Atika Haoues pour leur soutien moral et financier qui fut, sans aucun doute, bénéfique. Bien sûr je remercie également ma sœur Soraya pour tous les services rendus à distance. Merci beaucoup.

Je tiens à remercier l'ENSAM (Ecole Nationale Supérieure d'Arts et métiers), qui me forme en tant qu'ingénieur généraliste, pour m'avoir donné l'opportunité d'approfondir ma formation pendant deux ans dans le cadre d'un programme d'échange d'étudiants.

Je remercie Andrei Olekhnovitch, mon directeur de recherche, pour son aide et le temps précieux qu'il m'a consacré afin de m'inculquer une méthodologie de recherche rigoureuse.

Enfin, je remercie Alberto Teyssedou, mon codirecteur, pour son talent et sa pédagogie qui m'a donné goût à la thermo-hydraulique.

## RÉSUMÉ

La description adéquate des processus thermo-hydrauliques en écoulement gaz-liquide nécessite une information détaillée sur la structure interne de l'écoulement et sur les distributions du taux de vide ainsi que des vitesses de phases (gaz et liquide) dans le canal. Ceci est surtout important pour les écoulements diphasiques horizontaux. Dans ce cas, la migration des bulles vers le haut du canal due à la force de gravitation provoque l'apparition de profils de taux de vide fortement non-uniformes avec un maximum prononcé près de la paroi supérieure. L'objectif du présent mémoire est donc l'analyse de l'influence de ce phénomène sur les caractéristiques globales de l'écoulement, notamment sur le rapport entre le titre volumique et le taux de vide moyen en écoulement par bulle. Le travail proposé puise son originalité dans la méthode de caractérisation utilisée. Effectivement, le rapport entre le titre volumique et le taux de vide moyen en écoulement diphasique est déterminé par la non-uniformité des distributions des concentrations et des vitesses des phases dans le canal ainsi que par le glissement relatif entre les deux phases. La majorité des méthodes et/ou corrélations développées pour prédire ce rapport est basée sur le bien connu *modèle à écart de vitesse* (Drift Flux Model) proposé par Zuber et Findlay en 1965. Cependant, la plupart des travaux réalisés utilisant ce modèle font parallèlement appel à l'analyse expérimentale, où la détermination des caractéristiques globales utilise à la fois mesures expérimentales,

corrélations simplifiées et lectures graphiques. L'idée ici est d'étudier numériquement les paramètres d'écoulement par bulles en utilisant deux approches différents basées sur le modèle à écart de vitesse.

Le Chapitre 1 de ce document contient une entrée en matière où les différentes notions et définitions relatives aux écoulements diphasiques seront établies. De plus, puisque l'objectif de ce projet tourne autour du modèle à écart de vitesse, ce dernier est présenté en détail. Enfin nous terminons ce chapitre sur la problématique de ce projet liée aux paramètres clefs du modèle à écart de vitesse.

Le Chapitre 2 propose une étude numérique simplifiée qui donne une idée du comportement des écoulements diphasiques horizontaux. En effet, un des paramètres les plus importants du model à écart de vitesse est le paramètre de distribution  $C_0$ . Donc cette étude vise à étudier l'influence du profile de taux de vide sur le paramètre de distribution pour un écoulement par bulles gaz-liquide dans un tube horizontal. Afin d'en estimer cette influence de manière quantitative et cohérente, une série de profils de taux de vide local en trois dimensions, proches de ceux observés expérimentalement, est numériquement générée. D'autre part, une hypothèse simplificatrice concernant l'absence de glissement entre les phases est émise. Les résultats montrent que pour des profils de taux de vide non-uniformes, ce qui se produit normalement en écoulement horizontal, le paramètre de distribution peut être inférieur à l'unité. Dans ce cas, le titre volumique peut aussi être inférieur au taux de vide moyen.

Le Chapitre 3 présente une étude plus poussée sur l'estimation des paramètres globaux des écoulements diphasiques horizontaux. Effectivement dans ce chapitre le glissement entre les phases n'est pas négligé ; c'est-à-dire qu'un model du glissement entre les phases et de calcul de la vitesse relative est proposé. Ce model se base sur la considération du mouvement d'une bulle dans un écoulement liquide avec une distribution de vitesse non-uniforme. De plus, un model particulier (autre que le model à écart de vitesse), reflétant mieux l'effet de la non-uniformité des profils de taux de vide ainsi que l'effet de la vitesse relative local entre les phases, est utilisé. L'analyse confirme que, dans le cas de profils de taux de vide fortement asymétrique, le titre volumique peut être plus petit que le taux de vide moyen. Une telle situation est conditionnée par le fait que le paramètre de distribution correspondant est inférieur à un alors que la vitesse relative moyenne est négative.

Pour conclure, il est bon de noter que les résultats obtenus mettent l'accent sur la particularité des écoulements horizontaux. En effet, bien qu'un grand nombre d'études sur les écoulements verticaux ait été mené, les différences mises en évidence pour le cas d'une orientation horizontale de l'écoulement sont assez importantes. C'est surtout le cas du rapport entre le titre volumique et le taux de vide moyen qui peut grandement diminuer le long d'un canal présentant une forte asymétrie du taux de vide. Ce dernier aspect devrait être pris en considération lors de la conception des systèmes qui utilisent des écoulements diphasiques.



## ABSTRACT

The adequate description of the thermo-hydraulic processes in gas-liquid flow requires detailed information about the internal flow structure, the local void fraction as well as the phase velocity distributions (gas and liquid) in the channel. This is especially important for horizontal two-phase flows. In this case, the migration of the bubbles towards the top of the pipe, due to buoyancy, causes a quite non-symmetric void fraction distribution with a pronounced maximum near the upper pipe wall. The objective of the present work is to analyse the influence of this phenomenon on the global characteristics of the flow, in particular on the relationship between the volumetric flow quality and the average void fraction in bubbly flows. The originality of this work concerns the characterization method used to perform the work. Indeed, the ratio between the volumetric flow quality and the average void fraction in two-phase flows is determined by the non-uniformity of the concentration distributions and the phase velocity profiles in the channel as well as by the relative slip between the two phases. The majority of the methods and/or correlations developed to predict this ratio is based on the well known Drift Flux Model proposed by Zuber and Findlay (1965). However, most of the studies carried out using this model require some additional experimental informations, simplified correlations and graphic readings. The idea here consists of studying

numerically the bubbly flow parameters using two different approaches based on the drift flux model.

Chapter 1 of this document presents an introduction where various concepts and two-phase flow definitions are discussed. Moreover, since the aim of the project turns around the Drift Flux Model, it is presented in more detail. Finally the main subject of this project, related to key parameters used in the drift flux model, is discussed.

Chapter 2 proposes a simplified numerical study which gives an idea of the behaviour of horizontal two-phase flows. Indeed, one of the most important parameters of the Drift Flux Model is the distribution parameter  $C_0$ . This study aims at studying the influence of the void fraction profile on the distribution parameter for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe. In order to estimate this influence in a coherent quantitative way, a series of local void fraction profiles in three dimensions, close to those observed experimentally, is numerically generated. On the other hand, the assumption that there is no slip between the phases is put forward. This simplification allows us to show that for non-symmetric void fraction profiles, which occur normally in horizontal flows, the distribution parameter may be less than unity. In this case, the volumetric flow quality can also be less than the average void fraction.

Chapter 3 presents a more in-depth study on the estimation of the horizontal two-phase flow global parameters. In this chapter, the slip between the phases is not neglected; i.e., a model for determining the slip between the phases and therefore, for calculating the relative velocity is proposed. This model is based on the movement of a single bubble in

a liquid flow having a non-uniform velocity distribution. Moreover, a particular approach, better reflecting both the effect of non-uniform flow and concentration profiles as well as the effect of the local relative velocity between the phases than well known drift flux model, is used. The analysis of the results also show that, in the case of quite gravity-skewed local void fraction profiles, the volumetric flow quality can be smaller than the average void fraction. Such a situation is conditioned by the fact that the corresponding distribution parameter is less than one, while the mean relative velocity of the gas phase is negative.

To conclude, it must be noted that the results presented in this document underline the particularity of horizontal flows. As a matter of fact, although a great number of studies on vertical flows have been carried out in the past, the differences highlighted for a horizontal orientation of the flow are rather important. It is especially observed in a horizontal channel where a strong non-symmetric void fraction profile takes place; thus, the volumetric flow quality to the average void fraction can substantially decrease along the channel. This last aspect should be taken into account for the design of two-phase flow systems.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>DEDICACE .....</b>	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>v</b>
<b>RÉSUMÉ.....</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>ix</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>xii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>xiv</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>xv</b>
<b>LISTE DES ABRÉVIATIONS .....</b>	<b>xvii</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1.....</b>	<b>7</b>
<b>MODÈLE À ÉCART DE VITESSE.....</b>	<b>7</b>
1. DÉFINITIONS DE BASE.....	7
1.1. Taux de vide .....	8
1.2. Vitesse locales .....	10
1.3. Vitesses moyennes .....	11
1.4. Titre volumique .....	13
2. MODÈLE À ÉCART DE VITESSE .....	14
2.1. Définition du modèle.....	15
2.2. Étude des paramètres clefs du modèle.....	17
3. PROBLÉMATIQUE .....	21
<b>CHAPITRE 2.....</b>	<b>23</b>
<b>INFLUENCE DU PROFILE DE TAUX DE VIDE SUR LE PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION <math>C_0</math> POUR UN ÉCOULEMENT PAR BULLE GAZ-LIQUIDE DANS UN TUBE HORIZONTAL.....</b>	<b>23</b>

1. ÉTUDE DU PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION $C_0$ .....	24
<b>Influence of the void fraction profile on the distribution parameter <math>C_0</math> for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe.....</b>	<b>27</b>
1. INTRODUCTION .....	29
2. INFLUENCE OF THE VOID FRACTION PROFILE ON THE DISTRIBUTION PARAMETER $C_0$ FOR A GAS-LIQUID FLOW IN A HORIZONTAL ROUND PIPE.....	33
3. CONCLUSIONS.....	37
ACKNOWLEDGEMENTS .....	39
REFERENCES .....	39
<b>CHAPITRE 3.....</b>	<b>40</b>
<b>ÉTUDE NUMÉRIQUE SUR L'INFLUENCE DE LA STRUCTURE INTERNE D'UN ÉCOULEMENT DIPHASIQUE HORIZONTAL SUR LE TAUX DE VIDE MOYEN .....</b>	<b>40</b>
1. MOUVEMENT D'UNE BULLE AU SEIN D'UN LIQUIDE.....	41
2. MODÉLISATION DES PARAMÈTRES D'ÉCOULEMENT .....	46
<b>Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction.....</b>	<b>51</b>
1. INTRODUCTION .....	54
2. BASIC CONCEPTS OF FLOW MODELING.....	56
2.1 Void fraction distribution.....	57
2.2 Gas phase velocity .....	57
2.3 Flow distribution parameters .....	69
3. RESULTS AND DISCUSSION .....	72
4. CONCLUSIONS.....	82
ACKNOWLEDGEMENTS .....	83
REFERENCES .....	83
APPENDIX.....	86
<b>DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION .....</b>	<b>88</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>92</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>102</b>

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I.....	102
ANNEXE II.....	126
ANNEXE III .....	131

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1. Principales configurations d'écoulement vertical .....	3
Figure 1.2. Principales configurations d'écoulement horizontal .....	4
Figure 1.3. Diagramme représentant la présence de gaz au point M .....	9
Figure 3.1. Paramètre de distribution $C_0$ pour différentes vitesses de phases .....	47
Figure 3.2. Paramètre de distribution $C$ pour différentes vitesses de phases.....	49

### INFLUENCE OF THE VOID FRACTION PROFILE ON THE DISTRIBUTION PARAMETER $C_0$ FOR A BUBBLY GAS-LIQUID FLOW IN A HORIZONTAL ROUND PIPE

Figure 1. Local void fraction profiles in a horizontal two-phase flow (Andreussi et al., 1999). .....	32
Figure 2. Typical void fraction profiles. ....	34
Figure 3. $C_0$ as a function of $n$ .....	38

### NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE INTERNAL STRUCTURE OF A HORIZONTAL BUBBLY FLOW ON THE AVERAGE VOID FRACTION

Fig. 1. Local void fraction profiles in a horizontal two-phase flow (Andreussi et al., 1999). .....	58
Fig. 2. Typical void fraction profiles. ....	59
Fig. 3. Drift flux analysis of vertical (a) and horizontal (b) gas-liquid flows. ....	62
Fig. 4. Motion of a spherical bubble near the channel wall. ....	63
Fig. 5. Geometric parameters of the problem. ....	66
Fig. 6. Basic principles of finding of the gas velocity distribution. ....	67
Fig. 7. Dimensionless relative gas velocity distributions.....	68
Fig. 8. Relative gas velocity distribution in a vertical upward bubbly flow (Inoue et al., 1976). ....	69
Fig. 9. Two-phase flow parameters as a function of $\langle \alpha \rangle$ (profile 1) .....	76
Fig. 10. Two-phase flow parameters as a function of $\langle \alpha \rangle$ (profile 2a). ....	77
Fig. 11. Two-phase flow parameters as a function of $\langle \alpha \rangle$ (profile 3b) .....	78
Fig. 12. Two-phase flow parameters as a function of $\langle \alpha \rangle$ (profile 5b). ....	79
Fig. 13. Comparison of the two distribution parameters $C$ and $C_0$ .....	80
Fig. 14. Simulation of a void fraction profile development along a horizontal round pipe. ....	81



# LISTE DES ABRÉVIATIONS

## ABRÉVIATIONS

$A$	Section de passage du tube
$A_p$	Surface projetée d'une bulle
$C, C_0$	Paramètres de distribution
$C_D$	Coefficient de résistance
$j$	Densité de flux volumique
$F_D$	Force de résistance
$Q$	Débit volumique
$r$	Coordonnée radiale
$R$	Rayon du tube
$R_b$	Rayon de bulle
$Re$	Nombre de Reynolds
$T$	Temps
$V$	Volume de contrôle
$v$	Vitesse
$\tilde{V}_{21}$	Vitesse relative moyenne pondérée par le taux de vide

$V_{2j}$	Vitesse de dérive de la phase gazeuse
$z$	Position longitudinale dans le canal

### *Symboles grecs*

$\alpha$	Taux de vide
$\beta$	Titre volumique
$\rho$	Masse volumique
$\Phi$	Paramètre de non-uniformité

### *Indices*

1	Liquide
2	Gaz
$b$	Bulle

### *Exposants*

$n$	Exposant
$sb$	Écoulement à bulle unique

## INTRODUCTION

Dans de nombreux processus industriels, l'écoulement dans une conduite n'est pas celui d'un fluide homogène, compressible ou non, mais un mélange de deux phases (solide-liquide ou gaz-liquide). On dit alors qu'il s'agit d'un *écoulement diphasique*. On peut en trouver de multiples exemples dans l'industrie pétrolière, les réacteurs nucléaires, le transport hydraulique des déblais ou des combustibles, le transport pneumatique de nombreux matériaux pulvérulents, l'écoulement de vapeur et d'eau dans les générateurs de vapeur, les pompes à émulsion, etc. Par exemple, l'extraction et le transport d'hydrocarbure s'accompagnent systématiquement d'une certaine présence de gaz; il y a donc mélange de pétrole liquide et de gaz.

Si l'on parle de régime d'écoulement pour un écoulement monophasique, il n'est pas approprié d'utiliser cette désignation pour décrire les systèmes diphasiques. En effet, si un expérimentateur observe simultanément un écoulement de gaz et liquide dans un tube transparent, il verra que ces deux phases ont tendance à s'agencer suivant différentes structures dépendamment des vitesses et des concentrations de gaz et liquide. Ces structures sont appelées « configurations d'écoulement ». Cette désignation est plus précise puisque le terme « régime » est généralement utilisé pour désigner la présence ou non de la turbulence. La précision de la détermination d'une configuration d'écoulement

ainsi que la transition entre deux configurations successives sont très importantes pour pouvoir modéliser les écoulements diphasiques, estimer les pertes de charges ou le transfert de chaleur à la paroi, étudier la stabilité de l'écoulement, etc. Par exemple, il est impossible de décrire un écoulement par bulle et un écoulement annulaire avec précision en utilisant le même modèle. Il serait plutôt judicieux d'adopter deux modèles différents pour caractériser au mieux la structure de chacune des configurations. La configuration d'écoulement dépend, en général, des vitesses des phases, des masses volumiques, de la direction de l'écoulement (ascendant, descendant, co-courant, contre-courant), de la géométrie de la conduite, de l'orientation de la conduite (verticale, horizontale, inclinée), du flux de chaleur, etc. En bref, la configuration d'écoulement dépend d'un grand nombre de paramètres et il est parfois difficile de spécifier avec certitude l'existence de telle ou telle configuration d'écoulement. Pour les écoulements verticaux, les configurations les plus représentatives et les plus souvent analysées dans la littérature scientifique sont :

- écoulement par bulle
- écoulement par bouchon
- écoulement agité
- écoulement annulaire

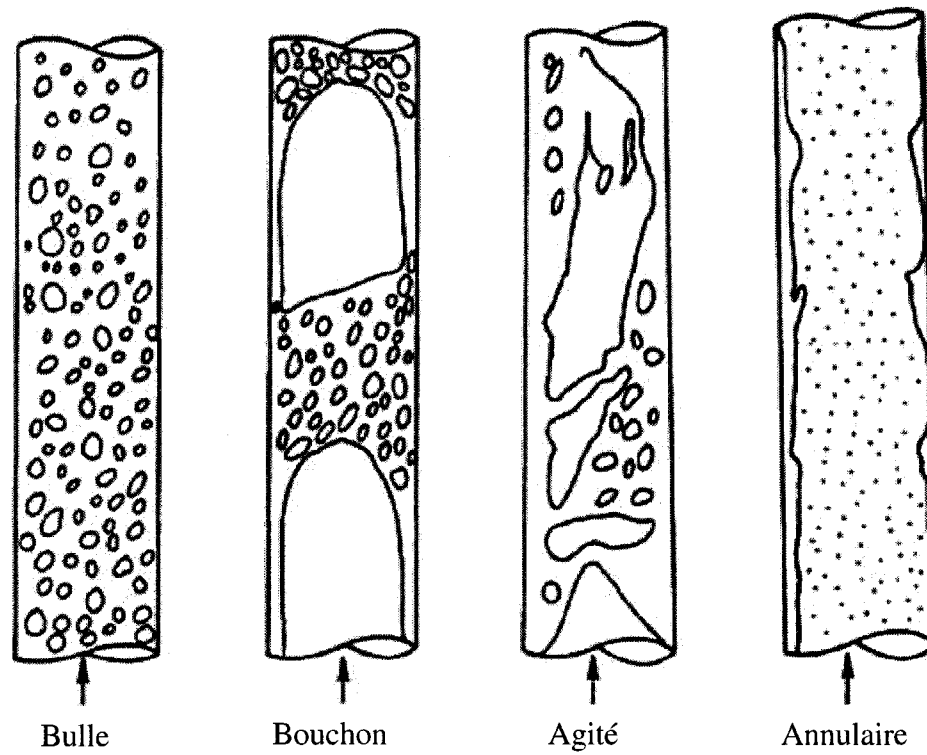


Figure 1.1. Principales configurations d'écoulement vertical

En ce qui concerne les écoulements horizontaux, les configurations sont différentes. On distingue :

- écoulement par bulle
- écoulement par poche
- écoulement par bouchon
- écoulement stratifié
- écoulement stratifié onduleux
- écoulement annulaire dispersé

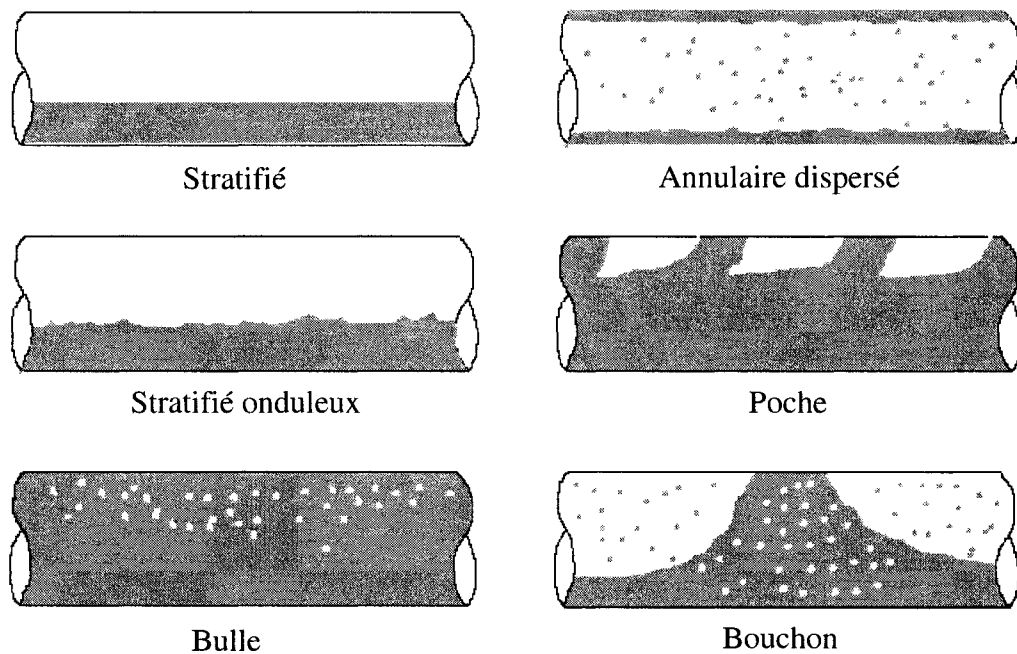


Figure 1.2. Principales configurations d'écoulement horizontal

À partir de la Figure 1.1 et la Figure 1.2, nous pouvons déjà conclure qu'il existe une grande différence engendrée par ces deux orientations sur l'agencement d'une phase par rapport à l'autre. Aussi, ces différences de configurations soulignent la particularité des écoulements horizontaux face aux écoulements verticaux. Nous comprenons également qu'il est essentiel de savoir quel type de configuration est présent dans l'écoulement pour prédire et décrire au mieux la structure interne de celui-ci.

La problématique des écoulements diphasiques réside dans le fait de pouvoir modéliser le comportement physique de ces écoulements. Cette modélisation se traduit par la détermination de certains paramètres clés qui conditionnent la structure d'écoulement.

Citons parmi eux le taux de vide, le titre volumique, la vitesse relative des phases, etc. Pour les ingénieurs, leur détermination est donc primordiale. Dans le contexte de l'industrie pétrolière, par exemple, le dimensionnement précis des équipements pour extraire, pomper et transporter le mélange pétrole-gaz nécessite une connaissance précise de ces paramètres. Il en est de même pour les installations nucléaires, cependant, dans ce cas, la connaissance de ces paramètres est importante non seulement pour l'optimisation et l'augmentation du rendement mais aussi pour l'analyse de sûreté des réacteurs. Il faut également souligner que parmi tous ces paramètres cités, le taux de vide est considéré comme le plus important car il caractérise la répartition d'une phase par rapport à l'autre. De plus les autres paramètres dépendent fortement de celui-ci. Nous comprenons ainsi combien est utile la prédiction du taux de vide en écoulement diphasique.

Cette prédiction devient encore plus essentielle lorsqu'il s'agit d'écoulements horizontaux. Ceci car ils sont caractérisés par une forte asymétrie de la répartition des phases liée à la migration des bulles vers la paroi supérieure du tube due à la différence de densité entre le gaz et le liquide. Enfin il est important de se pencher sur le cas des écoulements horizontaux car leurs études sont plutôt limitées dans la littérature scientifique comparativement aux écoulements verticaux.

Tout d'abord, nous ouvrirons le sujet en présentant le modèle le plus utilisé pour caractériser les écoulements diphasiques : le modèle à écart de vitesse (Chapitre 1 :

Modèle à écart de vitesse). Nous en profiterons pour rappeler les définitions essentielles à la description des systèmes diphasiques. Après une présentation détaillée du modèle à écart de vitesse, l'identification de ses paramètres clefs nous permet en fin de chapitre d'établir la problématique de ce mémoire.

Ensuite notre travail s'articulera autour de deux articles; l'un déjà publié et l'autre soumis par l'auteur pour publication dans une revue scientifique. Le premier constituera le Chapitre 2 : Influence du profil de taux de vide sur le paramètre de distribution  $C_0$  pour un écoulement par bulle gaz-liquide dans un tube horizontal (« Influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 238, p. 1155-1158). Le second article viendra approfondir l'analyse du comportement des écoulements horizontaux par bulle en développant le principe de glissement entre les phases. Il fera donc l'objet du Chapitre 3 : Étude numérique sur l'influence de la structure interne d'un écoulement diphasique horizontal sur le taux de vide moyen (« Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction », *Nuclear Engineering and Design*, soumis le 24 avril 2008). Un modèle autre que celui à écart de vitesse ainsi qu'un modèle de glissement pour caractériser quantitativement la vitesse relative entre les phases, seront examinés.



## CHAPITRE 1

---

### MODÈLE À ÉCART DE VITESSE

---

Le but du présent chapitre est d'amener le lecteur à comprendre la problématique de ce projet de recherche. L'étude tournant autour des paramètres du modèle à écart de vitesse, il convient de présenter ce modèle en détail. Ainsi, dans cette partie de ce mémoire, les définitions de base relatives aux écoulements diphasiques sont introduites. Ensuite nous nous attarderons sur le modèle à écart de vitesse pour enfin terminer sur la problématique du projet.

#### **1. DÉFINITIONS DE BASE**

Avant d'entrer dans la description du modèle à écart de vitesse et la problématique du sujet, il est utile et nécessaire de définir au préalable les quantités physiques décrivant les écoulements diphasiques dans les conduites.

Compte tenu du caractère complexe, fluctuant et aléatoire des écoulements diphasiques, il faut introduire des opérateurs de moyenne. Ces derniers permettent de simplifier l'analyse mathématique des systèmes diphasiques en agissant soit:

- sur la moyenne dans le *temps*,
- sur les moyennes dans l'*espace* (segment, section, volume),
- sur les moyennes dans le *temps* et l'*espace*.

Comme dans tout procédé de moyenne, on obtient des variables diphasiques globales qui ne décrivent plus l'écoulement dans tous ses détails (perte d'informations locales ou temporelles), mais qui permettent de mettre en évidence des paramètres qui peuvent être mesurables et qui présentent un fort intérêt pratique.

### **1.1. Taux de vide**

Le taux de vide local moyenné dans le temps en un point  $M$  de l'écoulement stationnaire (Figure 1.3) peut être déterminé de la manière suivante :

$$\alpha(M) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T X_g(M, t) dt \right), \quad (1.1)$$

où  $T$  est la durée de l'observation et  $X_g(M, t)$  est la fonction de présence de gaz définie par :

$$X_g(M, t) = \begin{cases} 1 \Rightarrow M \in \text{gaz} \\ 0 \Rightarrow M \in \text{liquide} \end{cases}, \quad (1.2)$$

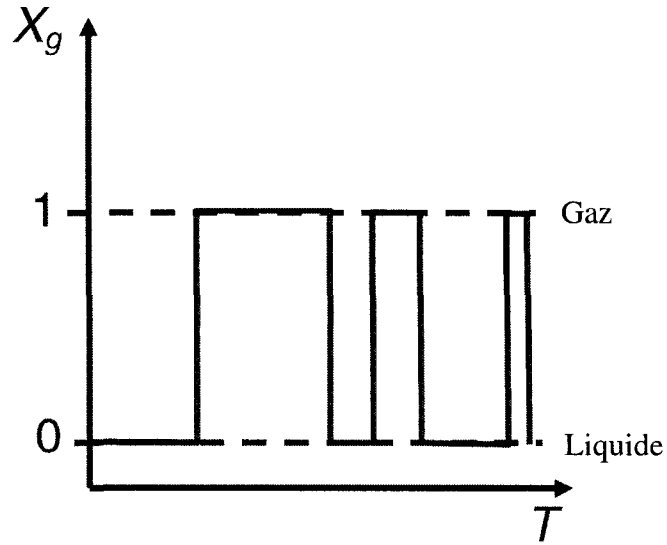


Figure 1.3. Diagramme représentant la présence de gaz au point  $M$

Comme il a déjà été mentionné antérieurement, le taux de vide peut être également moyenné sur un segment, une section ou dans un volume. Par exemple, le taux de vide moyen volumique  $\langle \alpha \rangle_v$  représente le rapport entre le volume occupé par le gaz et le volume total occupé par le mélange diphasique :

$$\langle \alpha \rangle_v = \frac{\int_{V_2} dV}{\int_V dV} = \frac{V_2}{V_1 + V_2}, \quad (1.3)$$

où  $V_1$  est le volume occupé par le liquide et  $V_2$  est celui occupé par le gaz.

Si le volume total consiste en le produit de la section de passage du tube  $A$  par un certain élément de longueur,  $\Delta z$ , alors le taux de vide volumique sera égal à celui surfacique :

$$\langle \alpha \rangle_v = \Delta z \int_{A_2} dA \left/ \left( \Delta z \int_A dA \right) \right. = \frac{A_2}{A_1 + A_2} = \langle \alpha \rangle_A, \quad (1.4)$$

où  $A_1$  est la portion de la section de passage occupée par le liquide et  $A_2$  est la section de passage occupée par le gaz. Bien sûr, la dernière égalité n'est valide que pour le cas d'un taux de vide moyenné dans le temps et à la condition qu'il n'y ait pas d'expansion du gaz due à la diminution de la pression le long de la conduite ou qu'il n'y ait pas de génération de la vapeur à l'intérieur de la longueur concernée.

### 1.2. Vitesse locales

Si  $v_1$  et  $v_2$  sont respectivement les vitesses locales des phases liquide et gazeuse moyennées sur les temps de résidence  $T_1$  et  $T_2$  en un point  $M$  donné de la conduite :

$$v_1(M) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} v_1(M, t) dt \right), \quad (1.5)$$

$$v_2(M) = \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} v_2(M, t) dt \right), \quad (1.6)$$

la vitesse relative de la phase gazeuse par rapport à la phase liquide en ce point est donnée par :

$$v_{21} = v_2 - v_1. \quad (1.7)$$

On définit également la densité de flux volumique de chaque phase comme suit :

$$j_1 = (1 - \alpha) v_1, \quad (1.8)$$

pour le liquide et

$$j_2 = \alpha v_2 \quad (1.9)$$

pour le gaz.

A partir des définitions (1.8) et (1.9) il est aussi possible d'exprimer la densité de flux volumique du mélange par :

$$j = j_1 + j_2. \quad (1.10)$$

### ***1.3. Vitesses moyennes***

On définit la vitesse moyenne de chaque phase comme suit :

$$\langle v_1 \rangle = \frac{Q_1}{A_1}, \quad (1.11)$$

$$\langle v_2 \rangle = \frac{Q_2}{A_2}, \quad (1.12)$$

où  $Q_k$  est le débit volumique de la phase  $k$ .

Egalement, la densité de flux volumique moyenne, ou autrement dit la vitesse superficielle de chaque phase, est définie en supposant que cette phase s'écoule seule dans la section de passage totale de la conduite.

Ainsi pour la phase liquide on obtient :

$$\langle j_1 \rangle = \frac{Q_1}{A} \quad (1.13)$$

et pour la phase gazeuse :

$$\langle j_2 \rangle = \frac{Q_2}{A}. \quad (1.14)$$

Il en découle la vitesse superficielle totale du mélange qui est donnée par :

$$\langle j \rangle = \langle j_1 \rangle + \langle j_2 \rangle. \quad (1.15)$$

Jusqu'à présent, seulement des moyennes simples ont été considérées. Pourtant, pour la description des écoulements diphasiques, nous utilisons souvent une autre procédure ; i.e., la moyenne pondérée par le taux de vide. Dans ce cas, la moyenne pondérée d'une fonction  $f_k$  peut être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$\overline{f_k} = \frac{\frac{1}{A} \int_A \alpha f_k dA}{\frac{1}{A} \int_A \alpha dA} = \frac{\langle \alpha f_k \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \quad (1.16)$$

Alors la vitesse moyenne pondérée par le taux de vide de la phase  $k$  est définie par :

$$\overline{v_k} = \frac{\frac{1}{A} \int_A \alpha v_k dA}{\frac{1}{A} \int_A \alpha dA} = \frac{\langle \alpha v_k \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \quad (1.17)$$

D'après les équations (1.8) et (1.9), l'équation ci-dessus peut aussi être écrite comme suit :

$$\overline{v_k} = \frac{\langle j_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle}, \quad (1.18)$$

où  $\alpha_k = \alpha$  pour le gaz et  $\alpha_k = 1 - \alpha$  pour le liquide.

En tenant compte que  $\langle j_k \rangle$  et  $\langle \alpha_k \rangle$  sont des quantités expérimentalement mesurables ;  $\overline{v_k}$  peut être déterminée expérimentalement ; d'où l'intérêt d'introduire la moyenne pondérée.

En utilisant l'équation ci-dessus, l'équation (1.15) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\langle j \rangle = \langle \alpha \rangle \overline{v_2} + (1 - \langle \alpha \rangle) \overline{v_1} . \quad (1.19)$$

À noter que  $\langle j \rangle$  est aussi appelée la vitesse du « centre de volume du mélange ».

#### ***1.4. Titre volumique***

Le titre volumique est défini comme étant le rapport entre le débit volumique du gaz et le débit volumique total, c'est à dire :

$$\beta = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} . \quad (1.20)$$

Notons qu'il ne faut pas confondre le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$  avec le titre volumique  $\beta$ . Pour illustrer cette différence il suffit de prendre comme exemple le barbotage du gaz au travers d'un liquide dans un réservoir. La vitesse moyenne du liquide étant nulle le titre volumique  $\beta$  vaut toujours 1 ( $Q_1 = 0$ ). Par contre nous comprenons aisément que le taux de vide  $\langle \alpha \rangle$  varie selon le débit de gaz injecté dans le réservoir.

Cette dernière relation clôt la présentation des définitions et concepts. Maintenant nous pouvons exposer le modèle à écart de vitesse.

## **2. MODÈLE À ÉCART DE VITESSE**

L'écoulement diphasique se caractérise, en règle générale, par une distribution non-uniforme des concentrations des phases dans la section du canal, ainsi que par un mouvement relatif d'une phase par rapport à l'autre. Donc, un problème d'écoulement diphasique devrait être formulé suivant deux champs de vitesses et de concentrations. Ce fait complique fortement la modélisation des écoulements diphasiques. Cependant, cette difficulté peut être significativement réduite en appliquant le modèle à écart de vitesse. Ce modèle proposé par Zuber et Findlay en 1965 a été développé principalement pour deux raisons :

- pouvoir prédire le taux de vide de façon générale et pour n'importe quel configuration d'écoulement diphasique. Ceci car la possibilité de prédire le taux de vide en fonction des paramètres opératoires (géométrie, pression, débits, propriétés thermodynamiques des phases, etc.), est d'une importance considérable pour la technologie des réacteurs nucléaires et pour les procédés industriels (e.g., chimiques).
- pouvoir analyser et interpréter les résultats expérimentaux de manière simple et précise.



Ainsi la majorité des méthodes et/ou corrélations développées pour prédire le taux de vide moyen sont basées sur le modèle à écart de vitesse. Il existe aussi plusieurs autres articles publiés à propos de ce modèle, à savoir : Ishii (1977), Lyczkowski (1978).

### 2.1. Définition du modèle

L'idée est de considérer l'écoulement diphasique comme un mélange homogène et d'exprimer la différence entre la vitesse de ce mélange et la vitesse du gaz à l'aide d'une *vitesse de dérive* définie par :

$$V_{2j} = v_2 - j. \quad (1.21)$$

D'après l'équation (1.16), la moyenne pondérée par le taux de vide de la vitesse de dérive peut alors s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \overline{V_{2j}} &= \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle} \\ &= \frac{\langle \alpha v_2 \rangle - \langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle} = \overline{v_2} - \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Cette expression permet en fait d'exprimer la vitesse moyenne pondérée de la phase gazeuse  $\overline{v_2}$  d'une manière très pratique pour l'analyse des données expérimentales et pour la prédiction du taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$ . En effet, en multipliant et en divisant le second terme du membre de droite par  $\langle j \rangle$ , nous obtenons :

$$\overline{v_2} = \frac{\langle \alpha j \rangle \langle j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} + \overline{V_{2j}} = C_0 \langle j \rangle + \overline{V_{2j}}, \quad (1.23)$$

où  $C_0$  est donné par :

$$C_0 = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle}, \quad (1.24)$$

et est appelé « paramètre de distribution ». Il quantifie l'effet radial de la distribution du taux de vide et de la vitesse superficielle sur la vitesse de la phase gazeuse. La moyenne pondérée de la vitesse de dérive,  $\overline{V_{2j}}$ , est quant à elle une mesure du glissement local entre les phases.

À partir de l'équation (1.23), nous voyons comment les données expérimentales peuvent être analysées et interprétées. Effectivement, en traçant la vitesse moyenne pondérée  $\overline{v_2}$  en fonction de la vitesse superficielle moyenne  $\langle j \rangle$  du mélange, nous constatons que le paramètre de distribution  $C_0$  est simplement la pente de la droite correspondante tandis que l'ordonnée à l'origine n'est rien d'autre que la moyenne pondérée de la vitesse de dérive,  $\overline{V_{2j}}$ .

Il est facile de représenter le modèle à écart de vitesse de façon adimensionnelle en divisant les deux membres de l'équation (1.23) par  $\langle j \rangle$  :

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} = C_0 + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle}, \quad (1.25)$$

où  $\beta$ , qui est a priori connu, dépend uniquement des conditions opératoires.

Donc l'expression générale pour prédire le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$  découle de l'équation (1.25), ainsi :

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\beta}{C_0 + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle}}. \quad (1.26)$$

Même si cette équation exprime directement le taux de vide moyen, nous pouvons aussi utiliser l'équation (1.25) puisque  $\beta$  est connu ou peut être facilement déterminé à partir des débits volumiques mesurés.

## 2.2. Étude des paramètres clefs du modèle

Le modèle à écart de vitesse est caractérisé par les deux paramètres principaux suivants :

- le paramètre de distribution  $C_0$ , qui tient compte de l'effet de la non-uniformité des profils de vitesses et du taux de vide. Il caractérise donc le glissement intégral.
- La vitesse de dérive moyenne pondérée  $\overline{V_{2j}}$ , qui prend en compte l'effet de la vitesse relative locale. Elle caractérise donc le glissement local entre les phases.

Ces deux paramètres ont été étudiés par Zuber et Findlay (1965) pour des écoulements verticaux axisymétriques. Concernant la vitesse de dérive  $V_{2j}$ , ils ont montré qu'elle pouvait simplement s'exprimer en fonction de la vitesse terminale d'une bulle dans un milieu liquide infini,  $v_\infty$ , de la façon suivante :

$$V_{2j} = v_\infty (1 - \alpha)^p \quad (1.27)$$

où la valeur de l'exposant  $p$  varie entre 0 et 3 dépendamment du diamètre de la bulle.

En ce qui concerne le paramètre de distribution  $C_0$ , les auteurs ont étudié les effets des distributions non-uniformes de l'écoulement et de concentration (taux de vide). En supposant différentes lois de puissance pour caractériser les distributions de vitesse et de taux de vide, il a été montré que la valeur de  $C_0$  pouvait varier de 1.0, lorsque la distribution de la vitesse ou du taux de vide est uniforme à travers la conduite, jusqu'à 1.5, lorsque le taux de vide a un maximum très prononcé au centre du tube.

Néanmoins, souvent appelé la « constante de profile »,  $C_0$  était considéré par certains comme invariant suivant la direction l'écoulement (c'est-à-dire qu'il soit ascendant ou descendant). Zuber et al. (1967) ont constaté une valeur de  $C_0$  constante pour une large gamme de vitesses en écoulement ascendant et descendant. Clark et Flemmer (1983) ont eux aussi montré que  $C_0$  gardait une valeur constant de 1.16 pour des écoulements air-eau par bulle, ascendants et descendant dans un tube de 50 mm. Réciproquement, Bhaga

et Weber (1972) ont trouvé que  $C_0$  variait entre les cas d'écoulement ascendant et contre-courant pour de faible vitesse de liquide. Martin (1976), lui, a constaté que  $C_0$  différait entre écoulement par bouchon ascendant et descendant. Oshinowo et Charles (1974) ont observé que la répartition des bulles, et donc  $C_0$ , différaient entre les cas ascendants et descendants. Brown et al. (1969) stipula que  $C_0$  devrait être plus grand que 1 en écoulement ascendant et inférieur à 1 en écoulement descendant, due au changement du profile de taux de vide. Cependant, leur analyse soulève certains doutes dans la mesure où ils ont été obligés d'imposer des vitesses de dérive plus faible que 12 cm/s pour leur théorie. Lorenzi et Sotgia (1978) ont étudié les écoulements air-eau par bulle, ascendant et descendant. Ils ont conclu que non seulement  $C_0$  varie suivant les deux sens de l'écoulement mais aussi pour un même sens d'écoulement (qu'il soit ascendant ou descendant).

C'est à cause de ces apparentes divergences que sont apparues les premières corrélations pour le calcul de  $C_0$  et  $V_{2f}$ . Clark et Flemmer ont proposé en 1985 pour les écoulements verticaux une corrélation dédiée à chaque sens d'écoulement. Ishii (1977), quant à lui, a établi différentes corrélations pour  $C_0$  et  $V_{2f}$  en écoulement vertical suivant la configuration de l'écoulement (écoulement par bulle, agité et annulaire). Ses équations dépendent essentiellement du nombre de Reynolds  $Re$  et des masses volumiques de chaque phase. Récemment, Hibiki et Ishii (2003) ont étudié l'équation constitutive pour

la vitesse de dérive  $V_{2j}$  pour différentes configurations d'écoulement (par bulle, par bouchon et annulaire). Les équations ont été déduites en tenant compte de la géométrie d'interface, du champ des forces volumiques, des contraintes de cisaillement, du transfert de quantité d'énergie à l'interface et du frottement à la paroi. Néanmoins, la corrélation qui reste indéniablement la plus précise et la plus utilisée pour le calcul du paramètre de distribution  $C_0$  et de la vitesse de dérive  $V_{2j}$ , est celle de Chexal et al. (1992). A noter que cette corrélation s'applique essentiellement pour les écoulements verticaux.

Cependant, dans le cas d'écoulements horizontaux, la migration des bulles vers la partie supérieure du tube, due à la différence de densité entre le gaz et le liquide, provoque des distributions de taux de vide fortement asymétriques dans la section transversale du tube. Il est donc évident que dans une telle situation les lois de puissance utilisées par Zuber et Findlay (1965) ne peuvent s'appliquer. De plus, pour des tubes de grands diamètres et des bulles de petites tailles, il se peut que le maximum local du taux de vide soit localisé très proche de la paroi supérieure ; là où la vitesse locale est inférieure à sa valeur moyenne. Sous de telles conditions, nous pouvons nous attendre à ce que la valeur de  $C_0$  diminue fortement. D'ailleurs ceci est parfaitement confirmé par les expériences. Par exemple, Kocamustafaogullari et al. (1994) ont montré que pour un écoulement air-eau par bulle dans une conduite horizontale de 50.3 mm, la valeur moyenne de  $C_0$  pouvait varier entre 0.82 et 0.986.

Néanmoins, Beattie (1996) a émis certains doutes concernant la possibilité que  $C_0$  soit inférieur à 1. Basé sur sa propre théorie de longueur de mélange (Beattie, 1972), il a essayé de montrer que pour les profils de taux de vide présentés par Kocamustafaogullari et al. (1994),  $C_0$  doit toujours être légèrement supérieure à 1.

### 3. PROBLÉMATIQUE

Nous comprenons l'enjeu capital de ces deux variables,  $C_0$  et  $\overline{V_{2j}}$ , pour l'étude des écoulements diphasiques. C'est pour cette raison qu'une analyse détaillée sur ces paramètres serait utile, surtout pour les écoulements horizontaux qui semblent plus délaissés dans la littérature. Il serait intéressant d'étudier le comportement de  $C_0$  en écoulement horizontal par bulle et voir quelle serait la réelle influence de la structure interne sur cette variable clé du modèle à écart de vitesse. D'ailleurs si le paramètre de distribution suscite tant de polémique c'est qu'il n'est peut être pas assez bien adapté pour quantifier le glissement intégral. Nous pourrions en dire autant du paramètre  $V_{2j}$ . Effectivement, caractériser la vitesse relative des deux phases en passant par la différence entre la vitesse de la phase gazeuse et celle du centre de volume du mélange ne semble pas physiquement logique. À première vue, il serait peut être plus correct de décrire le glissement local en fonction de la différence des vitesses de phases.

C'est au regard de la discussion présentée ci-dessus que nous nous concentreront dans les chapitres suivants sur l'analyse des paramètres du modèle à écart de vitesse lorsque l'écoulement est horizontal et tâcherons d'établir les limites et les défauts de celui-ci.



## CHAPITRE 2

---

# INFLUENCE DU PROFILE DE TAUX DE VIDE SUR LE PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION $C_0$ POUR UN ÉCOULEMENT PAR BULLE GAZ-LIQUIDE DANS UN TUBE HORIZONTAL

---

« INFLUENCE OF THE VOID FRACTION PROFILE ON THE  
DISTRIBUTION PARAMETER  $C_0$  FOR A BUBBLY GAS-LIQUID  
FLOW IN A HORIZONTAL ROUND PIPE »

Lakdar Haoues, Andrei Olekhnovitch, Alberto Teyssedou

*Nuclear Engineering and Design (vol. 238, p.1155-1158)\**

---

\* Les documents afférents à la publication de cet article sont présentés à l'ANNEXE II.

## 1. ÉTUDE DU PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION $C_0$

Comme mentionné dans le chapitre précédent, le paramètre de distribution est un paramètre important dans la caractérisation des écoulements diphasiques. Toutefois, même s'il a été examiné expérimentalement et numériquement en écoulement vertical, ses valeurs en écoulement horizontal restent controversées ; jusqu'au point où il n'est pas clair s'il est inférieur ou supérieur à 1.

À l'égard de ce désaccord, il est évident que la manière la plus appropriée d'évaluer le paramètre de distribution  $C_0$  est de retourner à sa propre définition :

$$C_0 = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = \frac{\frac{1}{A} \int_A \alpha j dA}{\left[ \frac{1}{A} \int_A \alpha dA \right] \left[ \frac{1}{A} \int_A j dA \right]}. \quad (2.1)$$

Cette approche a été mise à la base d'une étude dans laquelle nous estimons numériquement l'influence de différents types de profils de taux de vide sur  $C_0$  pour des écoulements diphasiques horizontaux. Les résultats principaux de cette étude sont présentés dans un premier article de l'auteur (« Influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe », *Nuclear Engineering and Design*, vol.238, p.1155-1158).

Pour effectuer une telle étude, il est indispensable de représenter le taux de vide et ses profils fortement asymétriques de manière la plus cohérente possible et fidèle à la réalité.

Ainsi neuf profils de taux de vide sont choisis et générés numériquement en 3D. Pour leur description mathématique différentes fonctions polynomiales ont été utilisées et leurs coefficients ont été ajustés de manière à obtenir deux types de profils :

- ceux dont le maximum est localisé à  $\frac{r}{R} = 0.5$ ,
- ceux dont le maximum est localisé à  $\frac{r}{R} = 0.75$ .

Le détail du code de programmation de ces profils est fourni à l'ANNEXE I.

La deuxième étape consiste à modéliser les distributions de vitesses. Pour un écoulement horizontal par bulle pleinement développé, il n'y a apparemment aucune raison évidente pour l'existence d'un glissement entre les phases étant donné que la poussée d'Archimède est orthogonale à la direction de l'écoulement. De plus, en ne considérant aucun contact direct entre les bulles et la paroi du canal (contact qui peut causer une certaine altération de la vitesse des bulles), nous supposons pour cette étude qu'il n'y a aucun glissement entre les phases ; ainsi :

$$v_1 \approx v_2 \approx j, \quad (2.2)$$

$$\langle \alpha V_{2j} \rangle \approx 0 \quad (2.3)$$

et

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} \approx \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = C_0. \quad (2.4)$$

Nous utilisons pour la description mathématique de la distribution de la vitesse la loi de puissance suivante :

$$j \propto \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n, \quad (2.5)$$

où  $n$  varie entre  $1/10$  et  $1/2$  pour avoir un éventail d'applicabilité assez large. Ainsi tous les régimes d'écoulement sont balayés : de laminaire ( $n = 1/2$ ) à turbulent ( $n = 1/10$ ).

Le détail du code de programmation de ces profils est fourni à l'ANNEXE I.

Enfin la dernière étape est le calcul du paramètre de distribution  $C_0$ . C'est par le biais de l'équation (2.1) que  $C_0$  est déterminé numériquement en utilisant une méthode d'intégration trapézoïdale. Le détail du code de programmation du calcul de  $C_0$  en fonction du taux de vide et du régime d'écoulement est fourni à l'ANNEXE I.

Nous concluons sur l'interprétation des résultats qui montrent que la valeur de  $C_0$  est effectivement inférieure à l'unité pour des profils de taux de vide avec un maximum très prononcé aux abords de la paroi supérieure. Dans ce cas là, le rapport entre le titre volumique  $\beta$  et le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$  est lui aussi inférieur à un.

# Influence of the void fraction profile on the distribution parameter $C_0$ for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe

L. Haoues, A. Olekhnovitch\*, A. Teyssedou

*Institut de génie nucléaire, Département de génie physique, École Polytechnique, C.P. 6079,  
succ. Centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7*

## Abstract

This paper presents the results of a numerical experiment on the influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  in a horizontal bubbly two-phase flow. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles, which occur normally in horizontal flows, the distribution parameter may be less than 1. In this case, the ratio of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  can also be less than 1.

**Keywords:** Two-phase flow, Horizontal pipe, Void fraction profile, Distribution parameter

---

\* Corresponding author. Tel.: +1 514 340 4711x5976; fax: +1 514 340 4192.

*E-mail address:* [andrei.olekhnovitch@polymtl.ca](mailto:andrei.olekhnovitch@polymtl.ca) (A. Olekhnovitch).

### Nomenclature

$A$	duct cross sectional area
$C_0$	distribution parameter
$f$	friction factor
$j$	volumetric flux density
$n$	exponent
$Q$	volumetric flow rate
$r$	radial coordinate
$R$	pipe radius
$v$	velocity
$V_{2j}$	gas drift velocity

### *Greek symbols*

$\alpha$	void fraction
$\beta$	volumetric flow quality

### *Subscripts*

1	liquid
2	gas

## 1. INTRODUCTION

Multiphase flows occur in multiple industrial applications and they are commonly encountered in chemical and heat transfer processes. Within the context of petroleum industries, for instance, the engineers often have to deal with two-phase gas-oil flows. This type of flow requires an accurate sizing of equipment for gathering, pumping, transporting and storing such two-phase mixtures. In the transport pipeline segments, the correct prediction of the void fraction  $\alpha$  is essential to obtain the optimal production and transportation rates of the oil and the gas for avoiding problems such as pump cavitations, excessive pressure losses, etc. On the other hand, the two-phase flows are widely presented in many other engineering fields, e.g., heat transfer equipments, nuclear power steam generators and boiling nuclear power reactors. In this case, the knowledge of two-phase flow parameters is of a great importance not only for the optimisation and the increase in efficiency of such installations, but also for their safe operation.

The prediction of two-phase flow parameters unconditionally requires a detailed information about the internal flow structure, the local and average void fractions as well as the phase velocity distributions in the channel cross-section. Actually, the majority of methods and/or correlations developed to predict the average void fraction are based on the drift flux model proposed by Zuber and Findlay (1965). Within the framework of

this model, the ratio of the volumetric flow quality  $\beta = Q_2/(Q_1 + Q_2)$  to the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  can be written as

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} = C_0 + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle}, \quad (1)$$

where the distribution parameter  $C_0$  has the following form:

$$C_0 = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = \frac{\frac{1}{A} \int_A \alpha j dA}{\left[ \frac{1}{A} \int_A \alpha dA \right] \left[ \frac{1}{A} \int_A j dA \right]} \quad (2)$$

and the drift velocity of the gas  $V_{2j}$  is defined as:

$$V_{2j} = v_2 - j, \quad (3)$$

where  $j = v_1(1 - \alpha) + v_2\alpha$  is the volumetric flux density of the mixture,  $v_1$  and  $v_2$  are the actual velocities of the liquid and the gas phase respectively and  $A$  is the duct cross sectional area.

This model takes into account both the effect of non-uniform flow and concentration profiles (distribution parameter  $C_0$ ) as well as the effect of the local relative velocity between the phases (drift velocity  $V_{2j}$ ). Zuber and Findlay (1965) had investigated the effects of non-uniform flow and concentration distributions on the value of the parameter  $C_0$  for vertical, axially symmetric flows through a circular duct. Different power law flow and void fraction distributions were assumed and it was shown that the value of  $C_0$  might vary from 1.0, when the distribution of the void fraction or



the velocity is uniform across the duct, to about 1.5, when the void fraction has a quite pronounced maximum at the center of the pipe. Therefore, if for a specific flow regime the void fraction distribution and the phase relative velocity can be predicted or, at least, evaluated, the average void fraction can be determined.

However, in the case of horizontal flows, the migration of bubbles towards the top of the pipe, due to buoyancy, causes a quite non-symmetric void fraction distribution within the pipe cross-section. Fig. 1 shows typical void fraction profiles which are characteristic for a bubbly gas-liquid horizontal flow (Andreussi et al., 1999). It is clear that the power law profiles which were used by Zuber and Findlay (1965) for their analysis cannot be applied for such void fraction distributions. Moreover, for large diameter pipes and small-size bubbles it may happen that the maximum void fraction will take place in the immediate vicinity of the wall where the local liquid velocity is lower than its average value. Under these conditions, one can presume a considerable decreasing of the value of the distribution parameter  $C_0$ .

The experiments perfectly confirm this rather qualitative conclusion. For example, Kocamustafaogullari et al. (1994) have shown that for air-water bubbly flows through a horizontal pipe of 50.3 mm internal diameter the average value of  $C_0$  is 0.986, and it can be as low as 0.82. It must be noted that in this study the distribution parameter  $C_0$  was determined graphically by using the following expression derived from Eq. (1):

$$\bar{v}_2 = \frac{\langle j_2 \rangle}{\langle \alpha \rangle} = C_0 \langle j \rangle + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle}, \quad (4)$$

where  $\bar{v}_2$  is the weighted mean velocity of the gas phase. It can be seen that by plotting the weighted mean velocity  $\bar{v}_2$  versus the average volumetric flux density  $\langle j \rangle$  of the mixture, the distribution parameter  $C_0$  is simply the slope of the corresponding line. Thus, the Eq. (4) is in reality another practical representation of the drift flux model.

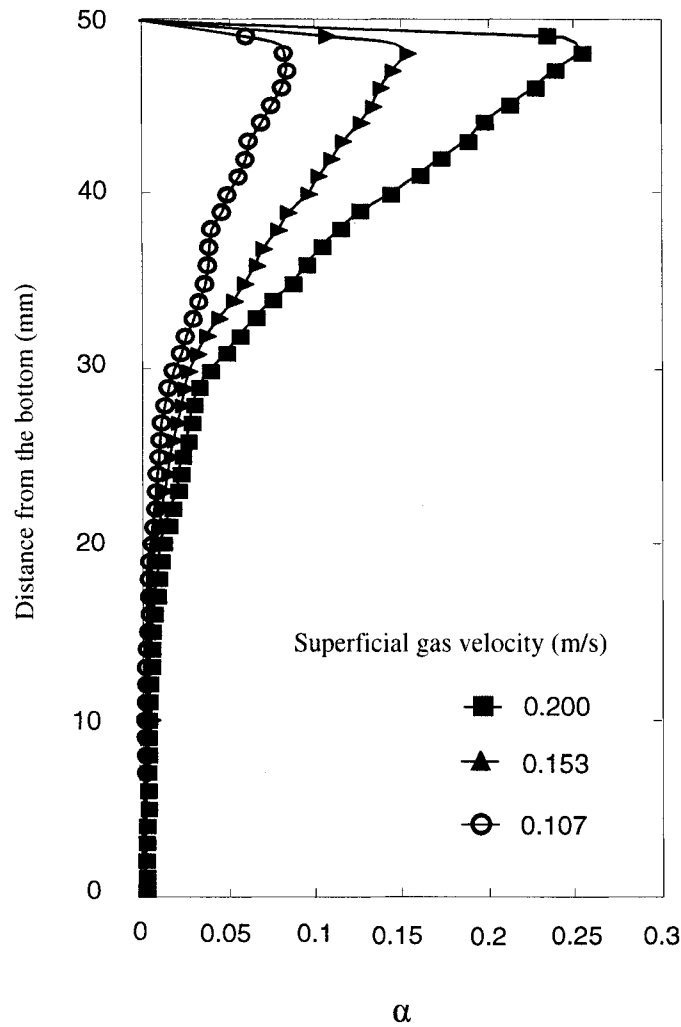


Fig. 1. Local void fraction profiles in a horizontal two-phase flow (Andreussi et al., 1999).

Beattie (1996) raised, however, some doubts about the possibility for  $C_0$  to be less than 1. Based on his own mixing length theory (Beattie, 1972), he tried to demonstrate that for the void fraction profiles presented by Kocamustafaogullari et al. (1994),  $C_0$  must be always slightly greater than unity.

In view of the above discussion, it is evident that the most appropriate manner to evaluate the distribution parameter  $C_0$  is to return to its definition (Eq. (2)). Thus, the principal goal of the present work is to estimate the influence of different types of void fraction profiles on the distribution parameter for horizontal two-phase flows.

## **2. INFLUENCE OF THE VOID FRACTION PROFILE ON THE DISTRIBUTION PARAMETER $C_0$ FOR A GAS-LIQUID FLOW IN A HORIZONTAL ROUND PIPE**

Whatever the initial void fraction profile is (even if it is uniform), due to the bubble migration towards the top of the horizontal channel, different profiles can occur along the pipe. In order to provide a coherent representation of the real structure of horizontal dispersed bubbly flows, nine typical void fraction profiles have been chosen; these profiles are shown in Fig. 2. For their mathematical description, several polynomials were used. However, even though the profiles 2 to 5 were generated by using the same mathematical functions, in order to obtain different locations of the

maximum void fraction ( $\frac{r}{R} = 0.5$  for profiles (a) and  $\frac{r}{R} = 0.75$  for profiles (b)), for a given set of functions their coefficients were adjusted. Note that the symmetric parabolic profile (profile 1) was considered for comparing the values of  $C_0$  for vertical and horizontal flows as well as to verify the results of the numerical integration with the exact analytical solution.

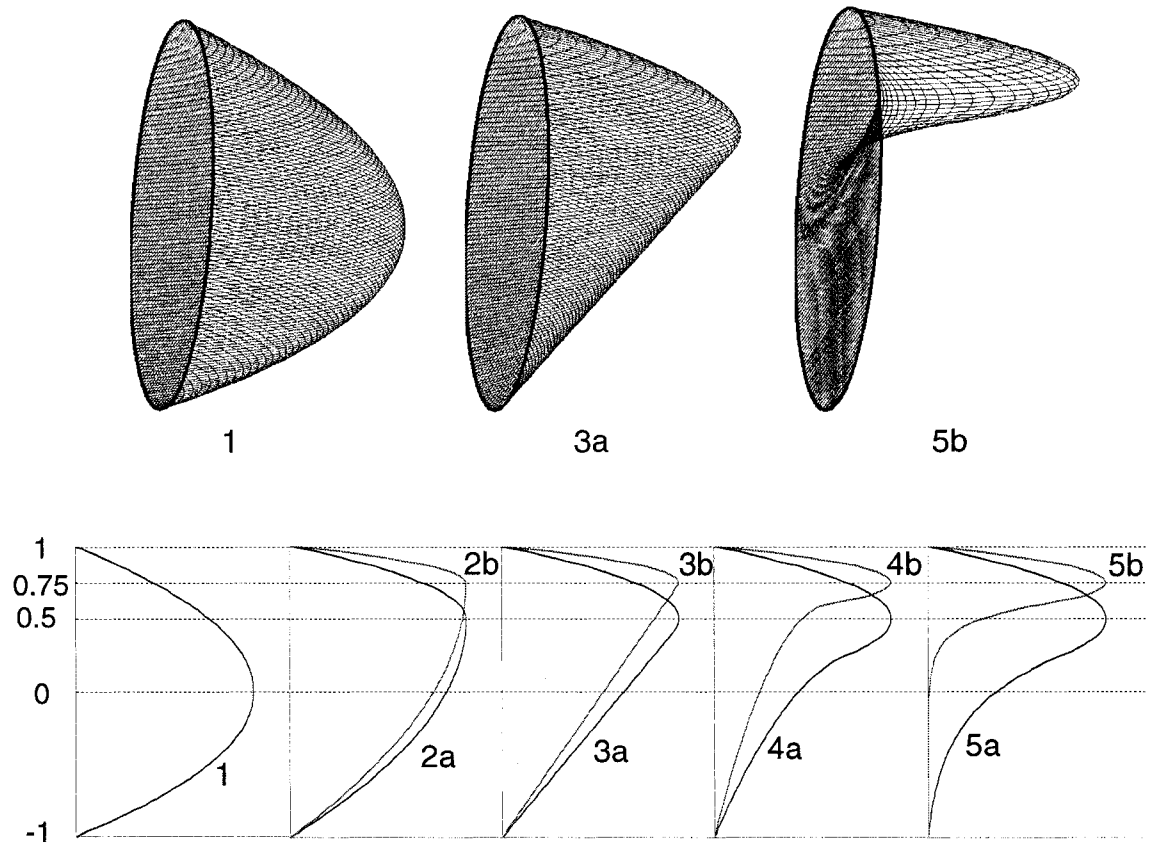


Fig. 2. Typical void fraction profiles.

For a fully developed, horizontal bubbly two-phase flow, there are no evidential reasons for the slip between phases to occur, because the gravitational force is normal to the flow direction, which can only provoke a characteristic buoyancy-skewed void fraction profile to develop. Further, any direct contact between the gas phase with the channel wall, which in the case of a stratified flow can provoke a certain alteration of its velocity, is not considered in the present work. Therefore, for the liquid and the gas phase velocities, it was supposed that there is no slip between the phases; thus,

$$v_1 \approx v_2 \approx j, \quad (5)$$

$$\langle \alpha V_{2j} \rangle \approx 0 \quad (6)$$

and

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} \approx \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = C_0. \quad (7)$$

For the description of the velocity distribution, the following power law profile was used:

$$j \propto \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n. \quad (8)$$

The assumptions (5) to (8) were formulated according with the study carried out by Kocamustafaogullari and Huang (1994). These authors have shown that the measured bubble interface velocity profiles are very close to the 1/7<sup>th</sup> power law turbulent flow velocity profile. It also must be noted that Kocamustafaogullari and Huang (1994) have observed that the predicted liquid velocities are always slightly greater than the bubble

interface velocities. However, taking into account a rather general and qualitative character of the present study, this observation was not considered here. Contrarily, for increasing the range of applicability of the analysis, the value of the exponent  $n$  has been varied between  $1/10$  and  $1/2$ . Thus, the whole range of possible flows, from laminar or rather pseudo-laminar ( $n=1/2$ ) to fully developed turbulent flow, was examined.

The values of the distribution parameter were determined using the Eq. (2) and a trapezoidal numerical integration method. The comparison of the values obtained for a parabolic void fraction profile (profile 1 in Fig. 2) with the corresponding exact analytical solutions shows that the absolute error of the used method does not exceed  $10^{-5}$ .

Fig. 3 shows the distribution parameter  $C_0$  as a function of the exponent  $n$ . It can be seen that for more or less symmetric void fraction profiles,  $C_0$  is greater than 1. However, for the case of the void fraction distribution with a clearly pronounced maximum near the top pipe wall, the value of  $C_0$  is always less than 1 (profile 5b in Fig. 3e). It is interesting to note that these values are characteristic for a void fraction profile with the maximum that takes place at  $\frac{r}{R} = 0.75$ . This fact confirms the experimental results of Kocamustafaogullari et al. (1994) (i.e.,  $C_0 = 0.82 - 0.99$ ) obtained for horizontal bubbly flows with the void fraction maximums located at  $\frac{r}{R} = 0.8 - 0.9$ .

Thus, the study that was carried out in the present work clearly shows that for horizontal bubbly flows, the value of the distribution parameter  $C_0$  can be close to 1 and even less than 1. This conclusion must be taken into consideration for analysing horizontal two-phase flows.

### 3. CONCLUSIONS

A numerical experiment on the effect of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  in horizontal two-phase flows was carried out. The value of the distribution parameter  $C_0$  was calculated using a trapezoidal numerical integration method for different void fraction and velocity profiles. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles with a pronounced maximum near the top pipe wall, the value of the distribution parameter and consequently the value of the ratio of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  can be less than 1.

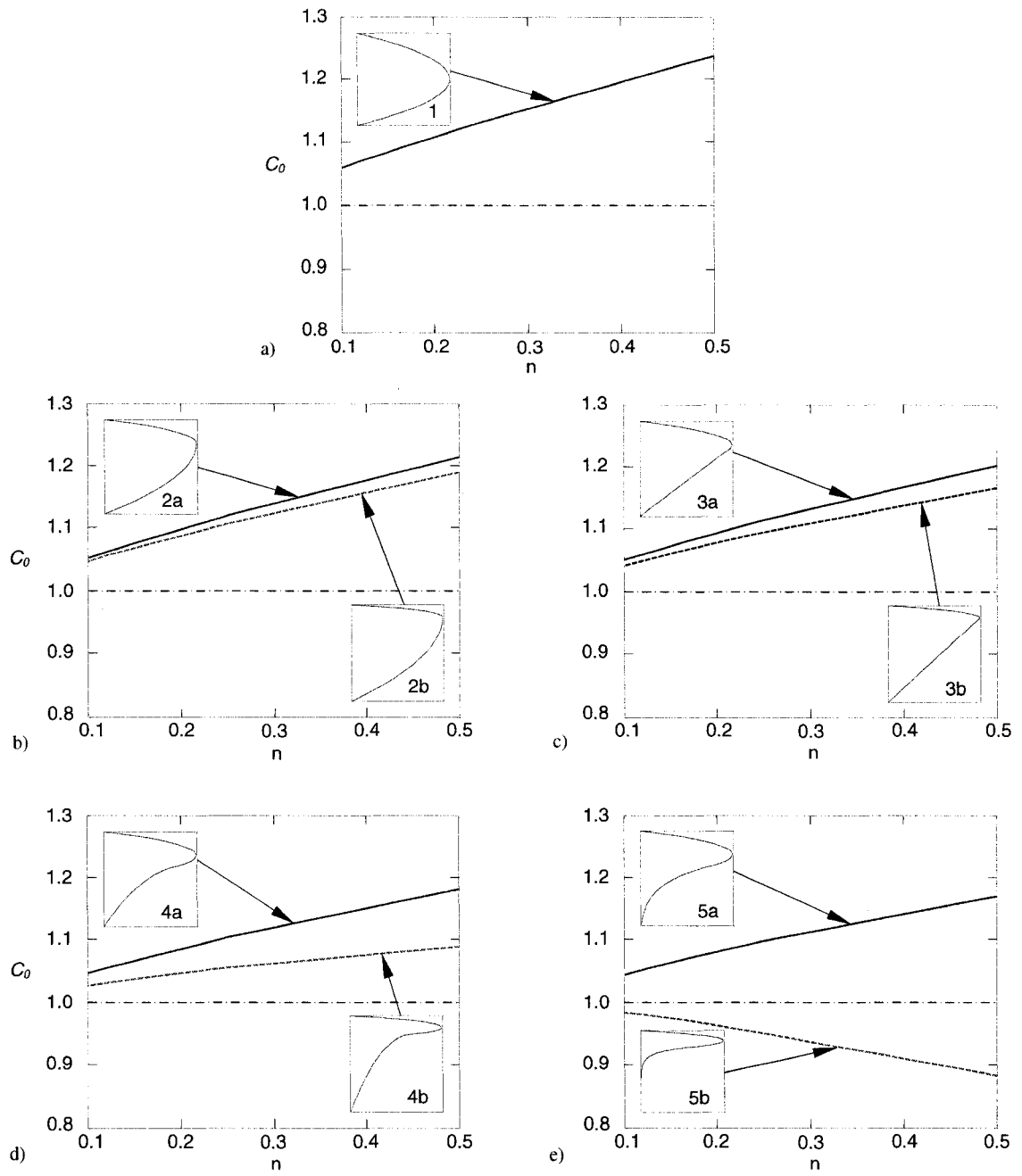


Fig. 3.  $C_0$  as a function of  $n$ .



## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was funded by the Hydro-Québec chair in nuclear engineering and the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC) discovery grant # 341896-07.

## REFERENCES

- Andreussi, P., Paglianti, A., Silva, F.S., 1999. Dispersed bubble flow in horizontal pipes. *Chem. Eng. Sci.* 54, 1101-1107.
- Beattie, D.R.H, 1972. Two-phase flow structure and mixing length theory. *Nucl. Eng. Des.* 14, 46-64.
- Beattie, D.R.H, 1996. Flow characteristics of horizontal bubbly pipe flow. *Nucl. Eng. Des.* 163, 207-212.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., 1994. Internal structure and interfacial velocity development for bubbly two-phase flow. *Nucl. Eng. Des.* 151, 79-101.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., Razi, J., 1994. Measurement and modeling of average void fraction, bubble size and interfacial area. *Nucl. Eng. Des.* 148, 437-453.
- Zuber, N., Findlay, J.A., 1965. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *Trans. ASME, J. Heat Transfer* 87, 453-468.

## CHAPITRE 3

---

# ÉTUDE NUMÉRIQUE SUR L'INFLUENCE DE LA STRUCTURE INTERNE D'UN ÉCOULEMENT DIPHASIQUE HORIZONTAL SUR LE TAUX DE VIDE MOYEN

---

« NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE  
INTERNAL STRUCTURE OF A HORIZONTAL BUBBLY FLOW ON  
THE AVERAGE VOID FRACTION »

Lakdar Haoues, Andrei Olekhnovitch, Alberto Teyssedou

*Submitted to: Nuclear Engineering and Design (April 24, 2008)\**

---

\* Les documents afférents à la soumission de cet article sont présentés à l'ANNEXE III.

## 1. MOUVEMENT D'UNE BULLE AU SEIN D'UN LIQUIDE

L'étude précédente a permis d'estimer le degré d'influence du profil de taux de vide sur le rapport entre le titre volumique  $\beta$  et le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$ . Néanmoins il est essentiel de souligner que ces résultats ont été obtenus en supposant qu'il n'y a pas de glissement relatif entre les phases. En réalité, et les expériences le confirment, il existe une certaine différence entre les vitesses de gaz et de liquide même si elle est très faible. Donc si nous voulons être plus précis dans notre caractérisation des écoulements diphasiques horizontaux, nous devons tenir compte du glissement relatif entre le gaz et le liquide.

Le glissement entre les phases est, en fait, relié au mouvement des bulles dans l'écoulement du liquide. Or la détermination du mouvement d'une bulle au sein d'un liquide est un problème qui n'est, jusqu'à aujourd'hui, pas explicitement résolu. En effet, les facteurs influençant le mouvement de la bulle sont si nombreux et difficiles à caractériser que sa modélisation reste limitée par les corrélations et fortement liées aux résultats expérimentaux en termes de coefficients empiriques. L'un des travaux le plus complet sur la théorie du mouvement des bulles est probablement celui de Levich (1962). Les équations que l'auteur a proposé, reposant sur la formule de Rybczynski-Hadamard, sont fortement conditionnées par le diamètre des bulles, le nombre de Reynolds  $Re$  et la présence des surfactants.

Parmi d'autres travaux qui traitent de ce sujet, citons, entre autres, ceux de Thomas et al. (1984), Spelt et Biesheuvel (1997), Merle et al. (2005).

Généralement on dénombre trois types de forces agissant sur une bulle en mouvement dans un liquide :

- la force de gravitation (poussée d'Archimède) ;
- la force de portance (« lift force ») ;
- la force de résistance.

Si la force de gravitation est très bien caractérisée par la poussée d'Archimède, en revanche, de nombreuses recherches ont été effectuées afin de modéliser la force de portance s'exerçant sur une bulle dans un écoulement liquide. Citons par exemple les travaux de Zun et al. (1975), Auton (1987), Cherukat et McLaughlin (1990), Cherukat et McLaughlin (1994), Cherukat et al. (1999), Hibiki et Ishii (2007).

Concernant la force de résistance, la plupart des théories reposent sur l'expression générale pour le mouvement d'un corps (d'une bulle dans un cas particulier) dans un fluide stagnant, c'est à dire :

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho v^2 \pi R_b^2, \quad (3.1)$$

où  $C_D$  est le coefficient de résistance,  $v$  la vitesse de la bulle et  $R_b$  son rayon. De nombreuses expériences et travaux ont été menés dans le but d'adapter cette formule pour des bulles en mouvement dans des champs de vitesse non nuls et ainsi évaluer le

coefficient  $C_D$ . Il paraît, ici, essentiel de mentionner les travaux d'Ishii : Ishii et Chawla (1979), Ishii et Zuber (1979), Ishii et Mishima (1980).

La valeur de ces forces qui régissent la vitesse d'une bulle, est conditionnée par plusieurs facteurs. La variation du champ de pression due à l'accélération et au frottement dans l'écoulement liquide porteur des bulles peut changer la vitesse relative ; la forme de la bulle et les conditions à l'interface gaz-liquide le peuvent aussi. D'autre part, les tourbillons à l'arrière de la bulle dus au détachement de la couche limite peuvent changer la valeur voire même la direction de la force de portance ainsi que la valeur de la force de résistance. La déformation de la bulle, le transfert de masse entre les deux phases dans le cas des écoulements bouillants, l'influence du sillage des bulles voisines, l'effet des parois du tube sont d'autres facteurs affectant la vitesse des bulles. Rajoutons encore, par exemple, la migration latérale des bulles dans un champ de vitesse non linéaire causée par un mouvement de zig-zag de bulles ellipsoïdales. Ceci affecte la vitesse relative (moyennée temporellement) du gaz car due à son inertie, une bulle ne peut instantanément changer de vitesse et atteindre sa vitesse d'équilibre. Ainsi, au cours de son déplacement radiale, la vitesse relative varie différemment dépendant de la direction du mouvement ; c'est-à-dire suivant le sens d'augmentation ou de diminution du gradient de vitesse de l'écoulement. Bref, nous pouvons constater que l'évaluation des forces agissant sur une bulle, et donc la détermination de la distribution de vitesse du gaz, est plutôt une tâche difficile et compliquée.

Ainsi, dans le cadre de notre recherche, une seconde étude a été menée aboutissant à un article soumis pour publication (« Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction », *Nuclear Engineering and Design*, soumis le 24 avril 2008) dans lequel nous analysons le rapport entre le titre volumique  $\beta$  et le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$  en proposant un modèle qui tient compte du mouvement relatif entre les phases (modèle de glissement).

Étant donné la complexité des différents facteurs pouvant influencer la vitesse relative, le peu d'information concernant les écoulements horizontaux et le fait que l'obtention de résultats numériques explicites (et préférablement adimensionnels) a été envisagée, plusieurs hypothèses ont été émises ; parmi elles :

- seuls les écoulements à hautes vitesses avec un taux de vide relativement faible sont considérés ;
- l'écoulement est par bulle, monodisperse et pleinement développé ;
- les bulles sont sphériques et non-déformables.

La force de gravitation ainsi que la force de portance ne sont pas considérées dans notre étude de la vitesse relative du gaz car ces deux forces sont orthogonales à la direction de l'écoulement. De plus, il existe une autre raison qui justifie la possibilité de négliger la force de portance. Les observations expérimentales (Andreussi et al., 1999) montrent clairement que les bulles ont tendance à migrer vers la région supérieure du tube. Ce

constat prouve, en fait, que la poussée d'Archimède domine largement la force de portance qui dans le cas d'une vitesse relative supposément négative pour l'écoulement horizontal, doit être dirigée vers le centre du canal. Plus encore, la forme caractéristique des distributions du taux de vide à un seul maximum près de la paroi supérieure du canal permet de confirmer cette conclusion de manière différente. En réalité, si la vitesse relative était positive, les maxima du taux de vide pourraient être également observés au voisinage de la paroi inférieure car la force de portance serait dirigée vers la périphérie du canal (comme dans le cas des écoulements verticaux ascendants). Par contre, si la vitesse relative était négative et d'une valeur importante, un maximum du taux de vide dans le centre du canal serait possible (comme dans le cas des écoulements verticaux descendants). Conséquemment, cette analyse nous mène à penser qu'en écoulement horizontal gaz-liquide le mouvement des bulles est principalement conditionné par la force de résistance à l'interface qui tend à annuler le possible retard de la bulle.

De ce fait, en évaluant la force de résistance s'exerçant sur une bulle en mouvement dans un champ de vitesse de liquide non-uniforme, nous déterminons sa vitesse. En itérant ce calcul pour chaque position radiale de la bulle nous déterminons la distribution de la vitesse de gaz et donc de la vitesse relative. Il faut souligner que ce modèle, à priori indépendant de l'orientation de l'écoulement, est en principe confirmé par les mesures expérimentales effectuées en écoulement vertical où le même type de profil de vitesse relative est observé (Inoue et al., 1976).

## 2. MODÉLISATION DES PARAMÈTRES D'ÉCOULEMENT

Malgré que le modèle à écart de vitesse reste le plus utilisé pour la prédiction du taux de vide, il faut quand même constater que ce modèle est assez encombrant dans le sens qu'il nécessite le calcul préalable de la vitesse superficielle  $j$  et de la vitesse de dérive  $V_{2j}$ . Par exemple, cette difficulté à évaluer  $\overline{V_{2j}}$  a été éprouvée par Hibiki et Ishii (2003) lors de la comparaison des valeurs de la vitesse de dérive prédites et mesurées expérimentalement. En effet, l'incertitude obtenue sur la vitesse de dérive moyenne pondérée variait entre 40% et 400% ! De plus, il semble que le modèle à écart de vitesse n'assure pas une dissociation adéquate entre le glissement intégral, caractérisé par le paramètre de distribution  $C_0$ , et celui local, représenté par la vitesse de dérive pondérée  $\overline{V_{2j}}$ . Par exemple, pour un certain profil de taux de vide (voir Figure 3.1), dans le cas des distributions uniformes des vitesses des deux phases ( $v_1 = Const$ ;  $v_2 = Const$ ) une égalité apparemment évidente  $C_0 = 1$  est possible seulement lorsque  $v_1 = v_2 = Const$ . En outre, la Figure 3.1 montre que la variation de la valeur du paramètre de distribution  $C_0$  peut aller jusqu'à 12%.



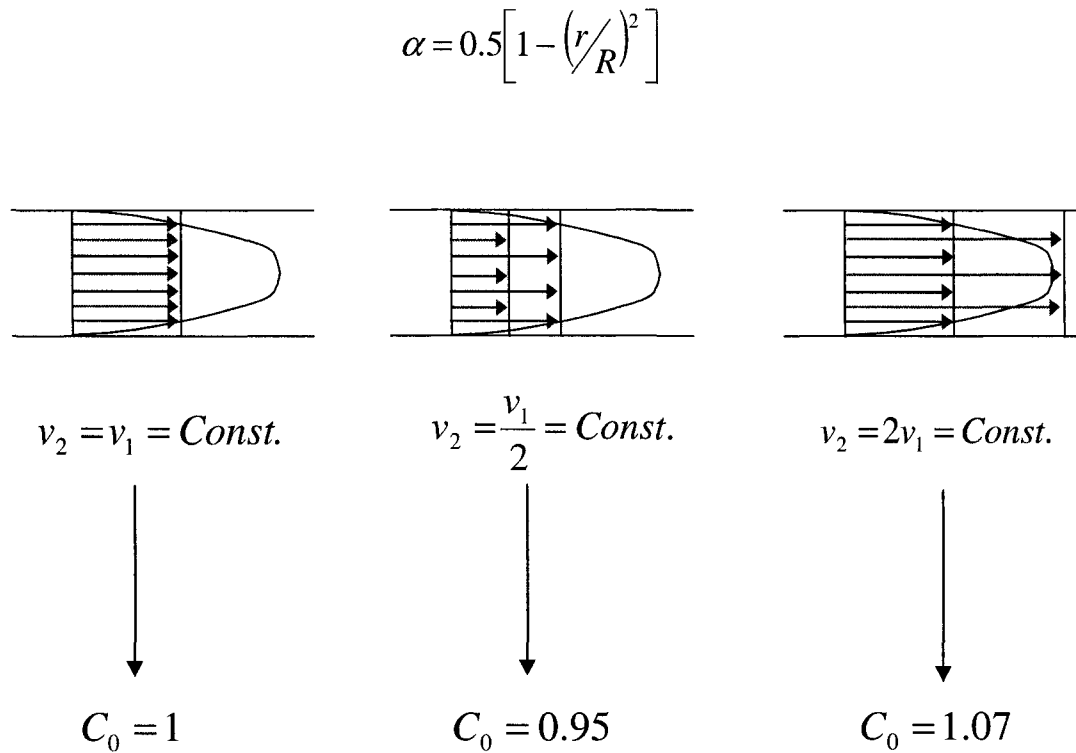


Figure 3.1. Paramètre de distribution  $C_0$  pour différentes vitesses de phases

D'ailleurs, Clark et Flemmer (1986), et Olekhnovitch et Pokhvalov (1986) ont indépendamment montré qu'il est préférable d'introduire des paramètres de non-uniformités qui sont basés sur les caractéristiques réelles de l'écoulement (vitesses et taux de vide locaux). Ces paramètres sont donnés par les expressions suivantes (Olekhnovitch et Pokhvalov, 1986) :

$$\Phi_1 = \frac{\langle v_1 (1 - \alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1 - \alpha) \rangle \langle \alpha \rangle} \quad (3.2)$$

et

$$\Phi_2 = \frac{\langle v_2 \alpha^2 \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle \langle \alpha \rangle}. \quad (3.3)$$

Ainsi, pour un profil de taux de vide donné, ils quantifient la non-uniformité des distributions des vitesses des deux phases.

À la base de ces paramètres, l'expression déterminant le rapport entre le titre volumique  $\beta$  et le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} = C \left[ 1 + \frac{\tilde{V}_{21}}{\langle j \rangle} \right], \quad (3.4)$$

où

$$C = \frac{\Phi_1}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{V}_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} \langle v_{21} (1 - \alpha) \rangle, \quad (3.6)$$

$$\Phi_{21} = \frac{\langle v_{21} (1 - \alpha) \alpha \rangle}{\langle v_{21} (1 - \alpha) \rangle \langle \alpha \rangle}. \quad (3.7)$$

Tout comme  $C_0$ , le nouveau paramètre de distribution  $C$  détermine l'influence de la non-uniformité des profils de l'écoulement (vitesses des phases et concentrations) sur  $\beta/\langle \alpha \rangle$  ; donc il caractérise l'effet du glissement intégral. Le glissement local est pris en compte par le rapport entre la vitesse relative moyenne pondérée par le taux de vide  $\tilde{V}_{21}$  et la vitesse moyenne  $\langle j \rangle$ . Une comparaison entre  $C_0$  et  $C$  conduit à :

$$C_0 = C + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle j \rangle} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)}. \quad (3.8)$$

Nous voyons donc clairement que  $C_0$  dépend du glissement local  $\langle \alpha V_{2j} \rangle / \langle j \rangle$ . Ainsi l'expression (3.8) prouve indéniablement que le modèle à écart de vitesse ne garantit pas la parfaite distinction entre le glissement local et intégral.

La figure 3.2 montre la « stabilité » du paramètre de distribution  $C$  face à des profils de vitesses uniformes. Quelque soit la valeur de ces vitesses, du moment qu'elles sont constantes,  $C$  est toujours égale à 1.

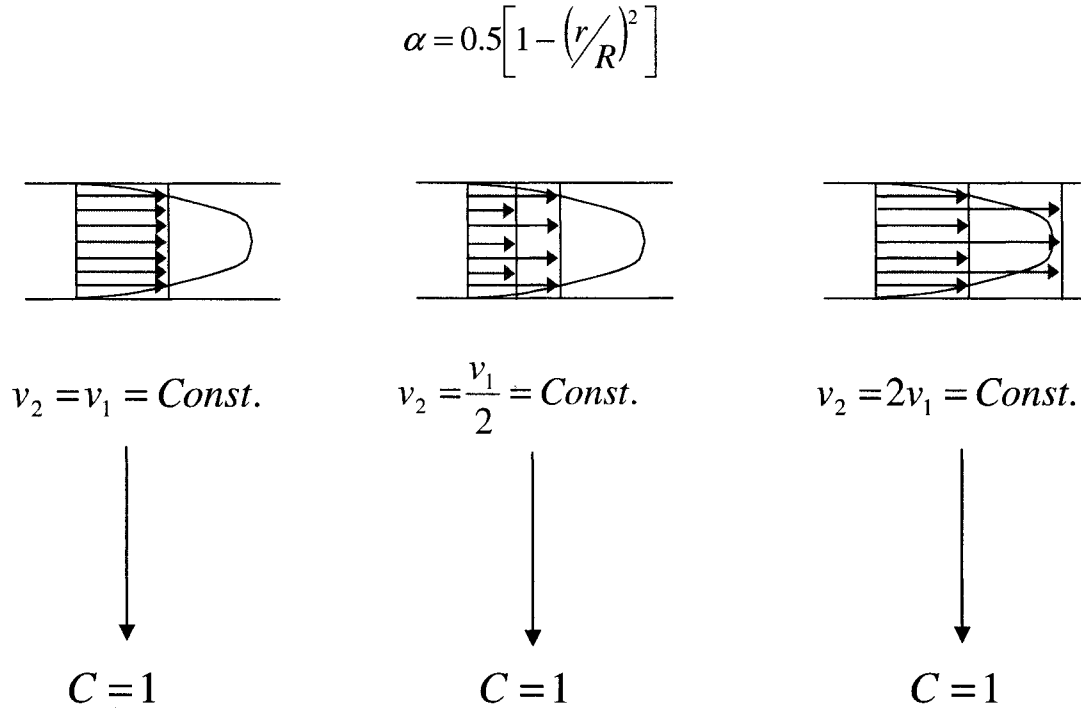


Figure 3.2. Paramètre de distribution  $C$  pour différentes vitesses de phases.

Conséquemment, ce « modèle à vitesse relative » que nous présentons en détail dans notre article et qui fut présenté ainsi qu'une partie de nos résultats lors de la conférence ICONNE 16 (Haoues et al., 2008), nous permet de calculer le paramètre de distribution  $C$ , la vitesse relative  $\tilde{V}_{21}$  et par conséquent, le rapport  $\beta/\langle\alpha\rangle$ . Tous les codes de programmation et de calcul sont fournis à l'ANNEXE I.

Nos résultats montrent que pour des profils de taux de vide fortement déformés par l'effet de la gravité, les paramètres de distribution  $C$  et les rapports  $\beta/\langle\alpha\rangle$  sont inférieurs à l'unité. De plus, quelque soit le profil de taux de vide, la vitesse relative moyenne pondérée est toujours négative. Ces conclusions doivent être prises en compte pour élaborer des analyses précises des écoulements diphasiques horizontaux.

# Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction

L. Haoues, A. Olekhnovitch\*, A. Teyssedou

*Institut de génie nucléaire, Département de génie physique, École Polytechnique, C.P. 6079,  
succ. Centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7*

## Abstract

This paper presents the results of a numerical experiment aimed to study the influence of the void fraction profile on integral flow characteristics of horizontal bubbly flows. To perform this analysis, a particular model which reflects better both the effect of non-uniform flow and concentration profiles as well as the effect of the local relative velocity between the phases than the well known drift flux model, was used. The relative phase velocity has been estimated by considering the movement of a single bubble in a liquid flow having a non-uniform velocity distribution. The analysis has shown that, in the case of quite gravity-skewed local void fraction profiles, the volumetric flow quality  $\beta$  can be smaller than the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$ . This  $\langle \alpha \rangle$ - $\beta$  relationship is

---

\* Corresponding author. Tel.: +1 514 340 4711x5976; fax: +1 514 340 4192.

*E-mail address:* [andrei.olekhnovitch@polymtl.ca](mailto:andrei.olekhnovitch@polymtl.ca) (A. Olekhnovitch).

conditioned by the fact that the corresponding distribution parameter is less than 1, while the void fraction weighted average relative velocity of the gas phase is negative.

*Keywords:* Two-phase flow, Horizontal pipe, Void fraction profile, Distribution parameter, Relative velocity

### **Nomenclature**

$A$	pipe cross-sectional area
$A_p$	frontal projected bubble area
$C, C_0$	distribution parameters
$C_D$	drag coefficient
$j$	volumetric flux density
$F_D$	drag force
$Q$	volumetric flow rate
$r$	radial coordinate
$R$	pipe radius
$R_b$	bubble radius
$Re$	Reynolds number
$v$	velocity
$\tilde{V}_{21}$	void fraction weighted average relative velocity

$V_{2j}$  gas drift velocity

*Greek symbols*

$\alpha$  void fraction

$\beta$  volumetric flow quality

$\rho$  density

$\Phi$  nonuniformity parameter

*Subscripts*

1 liquid

2 gas

$b$  bubble

*Superscripts*

$n$  exponent

$sb$  single bubble

## 1. INTRODUCTION

Steam-liquid or gas-liquid two-phase flows are widely encountered in many industrial applications such as boiling nuclear power reactors, steam generators and chemical engineering units. Furthermore, they are often a key factor in the design of such systems. For example, the vapor distribution in the core of a nuclear reactor determines its thermalhydraulic behavior under both normal and off-normal operation conditions. Thus, the knowledge and the accurate prediction of two-phase parameters are of a great importance not only for the optimization, i.e., the increase in efficiency of installations, but also for their safe operation. It is obvious that an adequate two-phase flow description unconditionally requires detailed information about the internal flow structure, the local and average void fractions, as well as the phase velocity distributions in the channel. Actually, most of available analytical and experimental investigations are performed on the internal structure of vertical two-phase flows. However, horizontal two-phase flow configurations are frequently encountered in both traditional heat transfer and chemical engineering equipment, different nuclear power reactor components, and in particular in CANDU reactor horizontal fuel channels. These flows have a particular structure provoked by buoyancy, that forces the bubbles to migrate towards the upper region of the fuel channel and thus, causing very pronounced non-symmetric void fraction distributions to occur.

Some limited information on the internal structure and local parameters of horizontal two-phase flows is given, among others researchers, by: Hewitt and Hall-



Taylor (1970), Dukler and Hubbard (1975), Taitel and Dukler (1977), Sharma et al. (1998), Lewis et al. (2002) and Ujang et al. (2006). In these studies, void fraction and phase velocity distributions were measured under slug and stratified flow conditions. The internal structure of horizontal bubbly flows was studied by Kocamustafaogullari and Wang (1991), Kocamustafaogullari and Huang (1994), Andreussi et al. (1999), Iskandrani and Kojasoy (2001) and Yang et al. (2004) and others. Furthermore, Andreussi et al. (1991), França and Lahey (1992) and Kocamustafaogullari et al. (1994) carried out drift flux analyses for various flow regimes in horizontal pipes. Using a one-dimensional approach, the authors have evaluated the order of magnitude of the two-phase distribution parameter and the drift velocity under a relatively limited range of flow conditions, i.e., for low average void fractions. For bubbly, plug and slug two-phase flow regimes, they found that the value of the distribution parameter  $C_0$  can change from 0.8 to 1.2 while the drift velocity may vary from -0.2 to 0.2 m/s. It must be pointed out that the one-dimensional analysis is obviously not able to reflect the non-similarity that exists between flow structures of different flow regimes. Therefore, the aforementioned values correspond rather to average parameters. Recently, Haoues et al. (2008) performed a numerical study of the influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles with a pronounced maximum located near the upper wall, the value of the distribution parameter, and consequently the value of the ratio of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  can

be less than 1. It must nevertheless be noted that this conclusion was drawn by assuming the absence of slip between phases. The objective of the present study is to analyze the relationship between  $\beta$  and  $\langle\alpha\rangle$  in horizontal bubbly flows subjected to possible phase slip.

## 2. BASIC CONCEPTS OF FLOW MODELING

The purpose of this work is not intended to establish a reliable relationship between the volumetric flow quality  $\beta$  and the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$ , but rather to estimate a possible influence of the internal flow structure on the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio by using numerically generated, but close-to-real and physically plausible distributions of local flow parameters. The proposed approach permits a series of assumptions and simplifications regarding some flow features to be introduced. For instance, only high velocity flows with a relatively low void fraction, for which the horizontal bubbly regime can exist, are considered. Thus, the liquid velocity profile is supposed to be not very different from that which takes place in single-phase turbulent flows. It is also assumed a fully developed monodispersed bubbly flow constituted of spherical non-deformable bubbles having no interaction between themselves as well as with the wall of the channel.

## ***2.1 Void fraction distribution***

Whatever the initial void fraction profile is (even if it is uniform), due to the bubble migration towards the upper region of the horizontal channel, different profiles can occur along the pipe. Fig. 1 shows several void fraction distributions which are characteristic for a bubbly gas-liquid horizontal flow (Andreussi et al., 1999). In order to provide a coherent representation of the real structure of horizontal dispersed bubbly flows, nine typical void fraction profiles have been chosen; they are shown in Fig. 2. For their mathematical description, several polynomials were used. However, even though the profiles 2 to 5 were generated by using the same mathematical functions, in order to obtain different locations of the maximum void fraction ( $r/R = 0.5$  for profiles (a) and  $r/R = 0.75$  for profiles (b)), for a given set of functions, their coefficients were consequently adjusted. Note that the symmetric parabolic profile (i.e., profile 1) was considered for comparing the values of  $C_0$  for vertical and horizontal flows as well as to verify the results of the numerical integration with the exact analytical solution.

## ***2.2 Gas phase velocity***

In the case of a quiescent liquid, the bubble motion is governed by a hydrostatic pressure field variation due to the external volumetric force (i.e., Archimedes' buoyancy principle), as well as the drag force acting on the bubble. This force depends not only on

its shape and interface boundary conditions, but also on the structure of the wake and on the distance between the bubble and the walls of the channel.

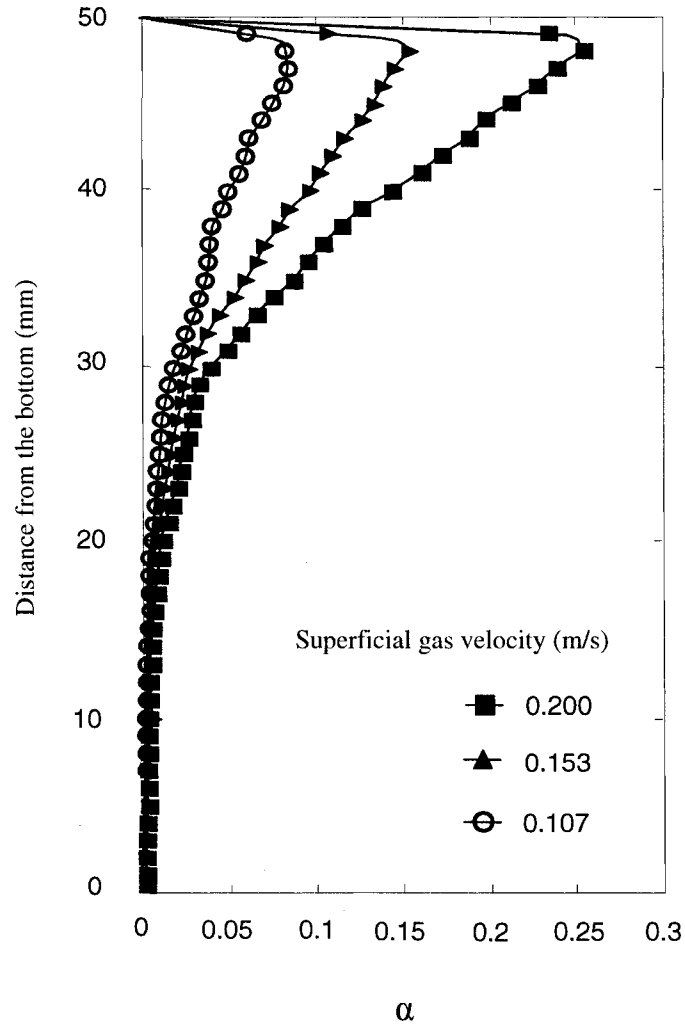


Fig. 1. Local void fraction profiles in a horizontal two-phase flow (Andreussi et al., 1999).

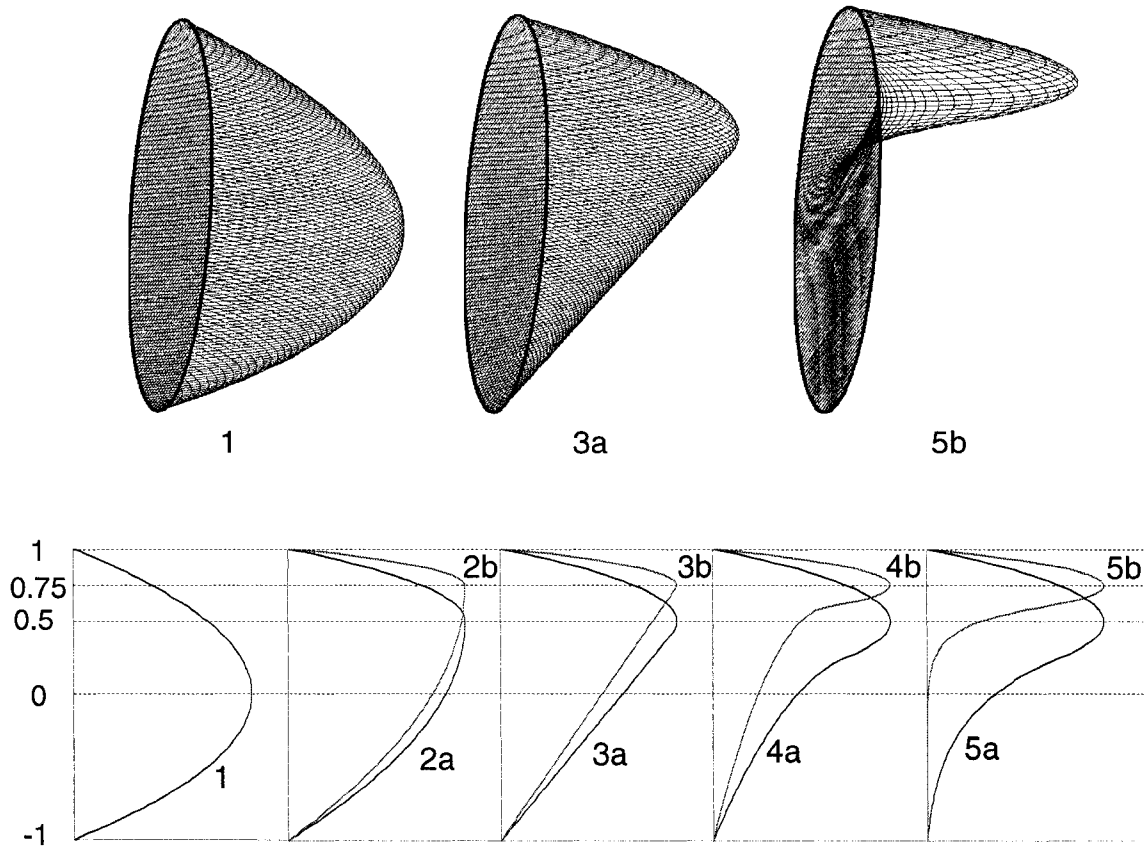


Fig. 2. Typical void fraction profiles.

Regarding a bubble in a laminar and especially in a turbulent liquid stream, one can expect a substantial change in its relative motion. The occurrence of supplementary components of the pressure gradient due to acceleration and friction may cause an important modification of the pressure field around the bubble. The vorticity, intrinsic to turbulent flows, possibly also affects the interfacial drag force. Finally, the bubble relative motion in a liquid stream can be perturbed by other factors. For instance, in a non-linear velocity field, the lateral bubble migration due to turbulent vortices or simply

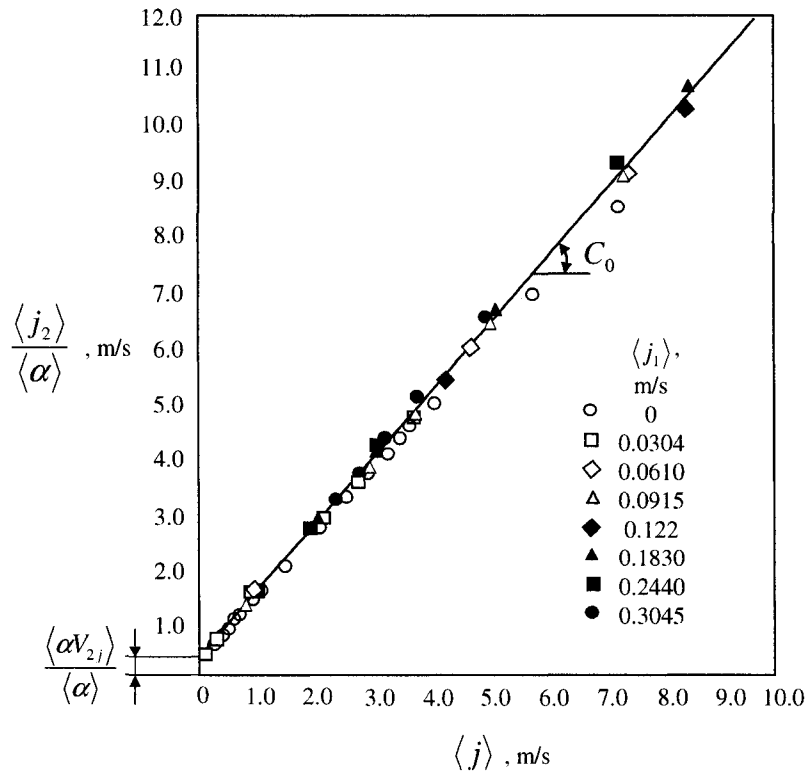
due to a zigzagging motion of ellipsoidal bubbles can modify the time-averaged value of the bubble relative velocity. This is related to the fact that due to inertia the bubble cannot instantly change its velocity; thus, throughout its lateral displacement, the relative velocity varies differently depending on the direction of motion, i.e., towards increasing or decreasing the flow velocity gradient.

For developed two-phase flows, however, the influence of such effects in general can be considered as weak. An extensive study carried out by Baker and Chao (1965) shows that, for a large range of Reynolds numbers based on channel characteristic dimensions and for bubbles having an equivalent radius larger than 3 mm, the bubble relative velocity in an upward turbulent water flow is very close to the terminal rise velocity of single bubbles through a motionless liquid. The same conclusion can be drawn from the analysis carried out by Zuber and Findlay (1965) based on Smissaert's (1963) data for upward gas-liquid flows in round tubes, represented graphically using the drift flux model in Fig. 3a. It can be seen that the relationship between the void fraction weighted average gas velocity  $\bar{v}_2 = \langle \alpha v_2 \rangle / \langle \alpha \rangle$  and the average volumetric flux density  $\langle j \rangle$  can be quite well correlated by a simple linear regression. The slope of the resulting line corresponds to the distribution parameter  $C_0$ , while the y-intercept is the weighted average drift velocity  $\bar{V}_{2j}$ , which characterizes the slip between the phases. Since these data were collected under different liquid velocity conditions, the almost perfect linearity of the regression line permits us to infer that the gas relative velocity is not significantly affected by the motion of the liquid phase. The similar judgment can be

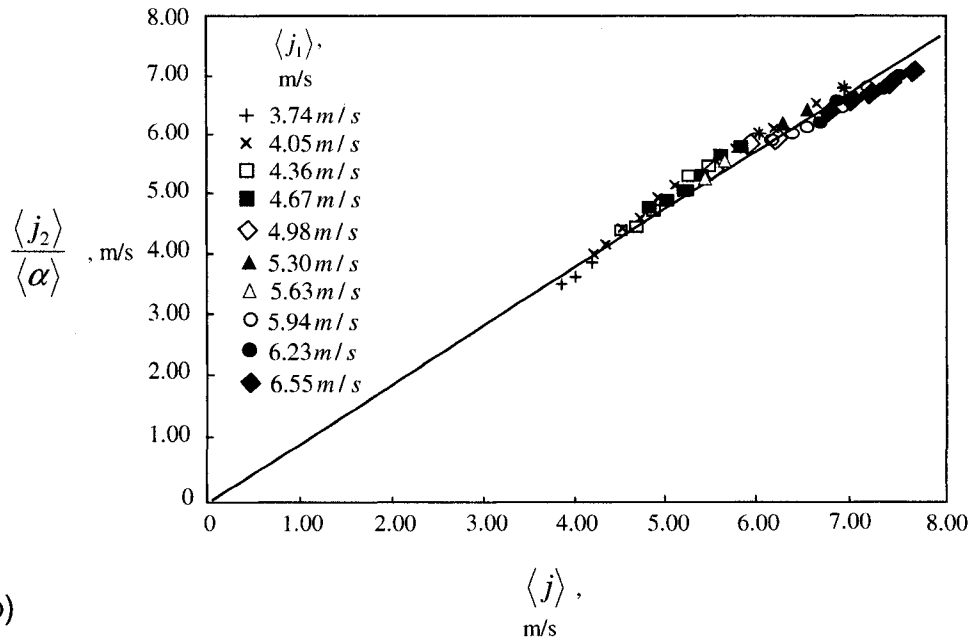
made from Fig. 3b that shows analogous data obtained by Kocamustafaogullari et al. (1994) for horizontal bubbly flows. However, in this case, the gas drift velocity has a small negative value. This practically zero drift and consequently a negligible relative velocity provide the idea that in horizontal gas-liquid flows, the motion of gas bubbles is mainly determined by the interfacial drag force which tends to cancel out the possible trailing of the bubble.

If the magnitude of this force is affected by the interaction between neighbouring bubbles and/or by their proximity to the wall of the channel, which is an obvious case for horizontal bubbly flows with gravity-skewed local void fraction profiles, the average relative bubble velocity may possibly be negative. From a theoretical viewpoint, in order to evaluate the phase relative velocity, such effects could and should be considered. However, since the quantitative influence of these effects may depend on thermo-physical properties of the phases, it is obvious that the analysis of all them cannot be accomplished within the framework of a study aimed to obtain explicit numerical results. Therefore, among all possible mechanisms, only one, namely the non-uniform distribution of the dynamic pressure on the surface of a bubble moving in a liquid stream having a non-uniform velocity profile, is examined. As this mechanism was probably never studied before, it will be described in detail in the following sections.

Consider a spherical and non-deformable bubble which moves at a very close, but at a constant distance along the wall of the channel (Fig. 4a). It is clear that the non-uniform liquid velocity field around the bubble must provoke a complex internal circular motion of the gas inside it.



(a)



(b)

Fig. 3. Drift flux analysis of vertical (a) and horizontal (b) gas-liquid flows.



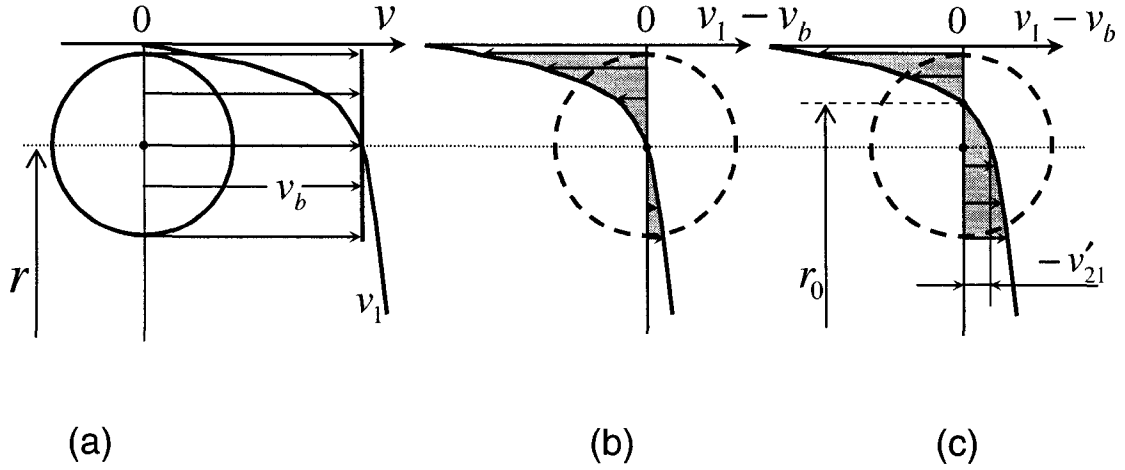


Fig. 4. Motion of a spherical bubble near the channel wall.

Nevertheless, since the void fraction is merely determined by the volume occupied by the gas phase, only the velocity at the center of the bubble, considered as a bulk object, must be required to evaluate the relationship between  $\beta$  and  $\langle\alpha\rangle$ . Suppose that the bulk bubble velocity is equal to that of the liquid at the position of the center of the bubble and consider such a problem in the coordinate system with the origin located at the center of the bubble (Fig. 4b). It is apparent that the flow around the bubble and consequently the distribution of the magnitude of the interfacial viscous interaction are quite non-uniform. Thus, at the location of the bubble there are zones with positive (near the wall) and negative (towards the center of the channel) relative gas velocities. Further, if the viscous liquid-gas interaction on the surface of the bubble is not completely balanced by the internal circulation of the gas, it can provoke the occurrence of a

resulting drag force<sup>\*</sup> which will slow down the bubble and thus induce, at least at the center of the bubble, a perceptible negative relative velocity  $v'_{21} = -(v_l - v_b)|_{r_b}$  (Fig. 4c).

The value of this relative velocity can be evaluated using the following formal approach. For a body (a bubble in the present case), moving with a constant velocity  $v$  in a motionless fluid, the drag force is generally expressed as:

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho v^2 A_p, \quad (1)$$

where  $A_p$  is the frontal projected area and  $C_D$  is the drag coefficient that depends on the geometry of the body, the nature and characteristics of the viscous interaction, as well as on the velocity of the body. Note that in the coordinate system with its origin located at the center of an ascending body, the drag force acts as a “pushing force”, while the buoyancy force should become a “retaining force”.

In the case of a body moving in a flow characterized by a non-uniform velocity profile, the drag force can be formally written as follows:

$$F_D^* = C_D^* \frac{1}{2} \rho \overline{v_{21}^2}^{A_p} A_p = C_D^* \frac{1}{2} \rho \int_{A_p} v_{21}^2 dA_p, \quad (2)$$

where  $v_{21}$  is a function that describes the local relative velocity field, while  $C_D^*$  is based on the relative velocity determined at its center.

---

<sup>\*</sup>The non-uniformity of the flow, or in another words the circulation velocity of the liquid phase, can also bring about the occurrence of a lift force. However, due to the absence or the small value of the bubble relative velocity, the lift force should be very weak as compared with the gravitational force; therefore, it is not taken into account in this work.

For the steady motion of a bubble in a horizontal liquid flow, there will be no retaining force; thus, the resulting drag force must be zero. Then, if the liquid velocity profile is given by the power law relationship:  $v_1 \propto (1 - r/R)^n$ , for two-phase flows at very low void fractions (i.e., no more than one bubble is present in the channel cross-section at a time), the gas velocity distribution can be written as,  $v_2^{sb}(r) \approx v_1(r) + v'_{21}(r) = v_1[r_0(r)]$  (Fig. 4c), where  $r_0 = f(r)$  is the radial position at which the local bubble relative velocity is zero. This position can be determined from the following integral equation:

$$\int_{r_0}^{r+R_b} [v_1(r') - v_2^{sb}(r')]^2 r' \theta(r') dr' - \int_{r-R_b}^{r_0} [v_1(r') - v_2^{sb}(r')]^2 r' \theta(r') dr' = 0, \quad (3)$$

or

$$\int_{r_0}^{r+R_b} \left[ \left(1 - \frac{r'}{R}\right)^n - \left(1 - \frac{r_0(r)}{R}\right)^n \right]^2 r' \theta(r') dr' - \int_{r-R_b}^{r_0} \left[ \left(1 - \frac{r'}{R}\right)^n - \left(1 - \frac{r_0(r)}{R}\right)^n \right]^2 r' \theta(r') dr' = 0, \quad (4)$$

where  $R$  and  $R_b$  are the channel and bubble radii respectively,  $\theta$  and  $r'$  are current angle and radius (Fig. 5). It is apparent that for a “single bubble” two-phase flow, the gas phase velocity is constant for  $r \geq (R - R_b)$  and it is equal to  $v_2^{sb}(r) = v_1[r_0(R - R_b)]$ . The velocity profile of this kind is sketched in Fig. 6a by a solid line. It is interesting to note that the same particularity of the gas phase velocity distribution near the wall of the channel was presented by Yang et al. (2003) for vertical upward bubbly flows.

To determine the gas phase velocity in the interval  $(R - R_b) \leq r \leq R$  for bubbly flows at higher void fractions, one should take into consideration the effect of other

bubbles that move farther from the wall of the channel and consequently having greater velocities (Fig. 6b).

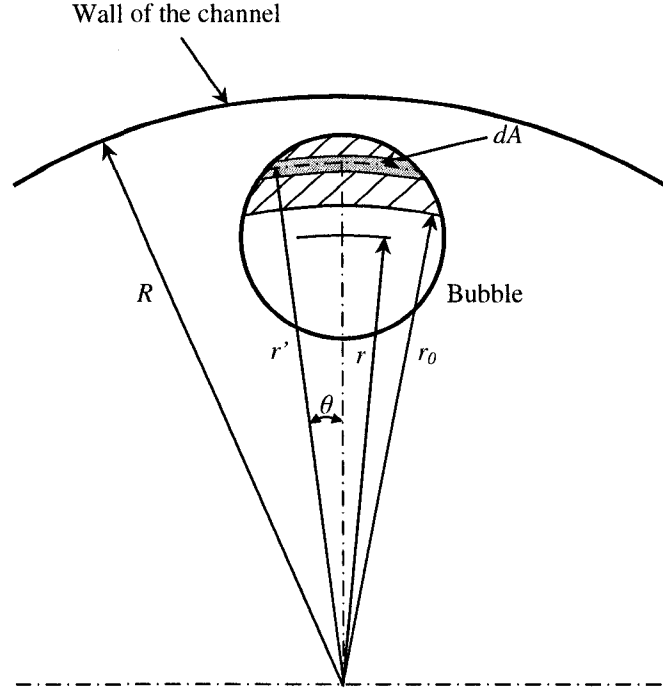


Fig. 5. Geometric parameters of the problem.

In the present study, some mathematical functions reflecting at least the expected trends of such an effect were used for modeling the gas phase velocity profile (shown in Fig. 6a by a dashed line). However, the results obtained using such profiles were not very different from those calculated by considering that the gas velocity is constant for  $r \geq (R - R_b)$ . For this reason, only the assumption that

$$v_2 = v_2^{sb} = \begin{cases} v_{10} \left( 1 - \frac{r_0(r)}{R} \right)^n & 0 \leq r \leq (R - R_b) \\ v_{10} \left( 1 - \frac{r_0(R - R_b)}{R} \right)^n & (R - R_b) \leq r \leq R \end{cases} \quad (5)$$

was used in this work.

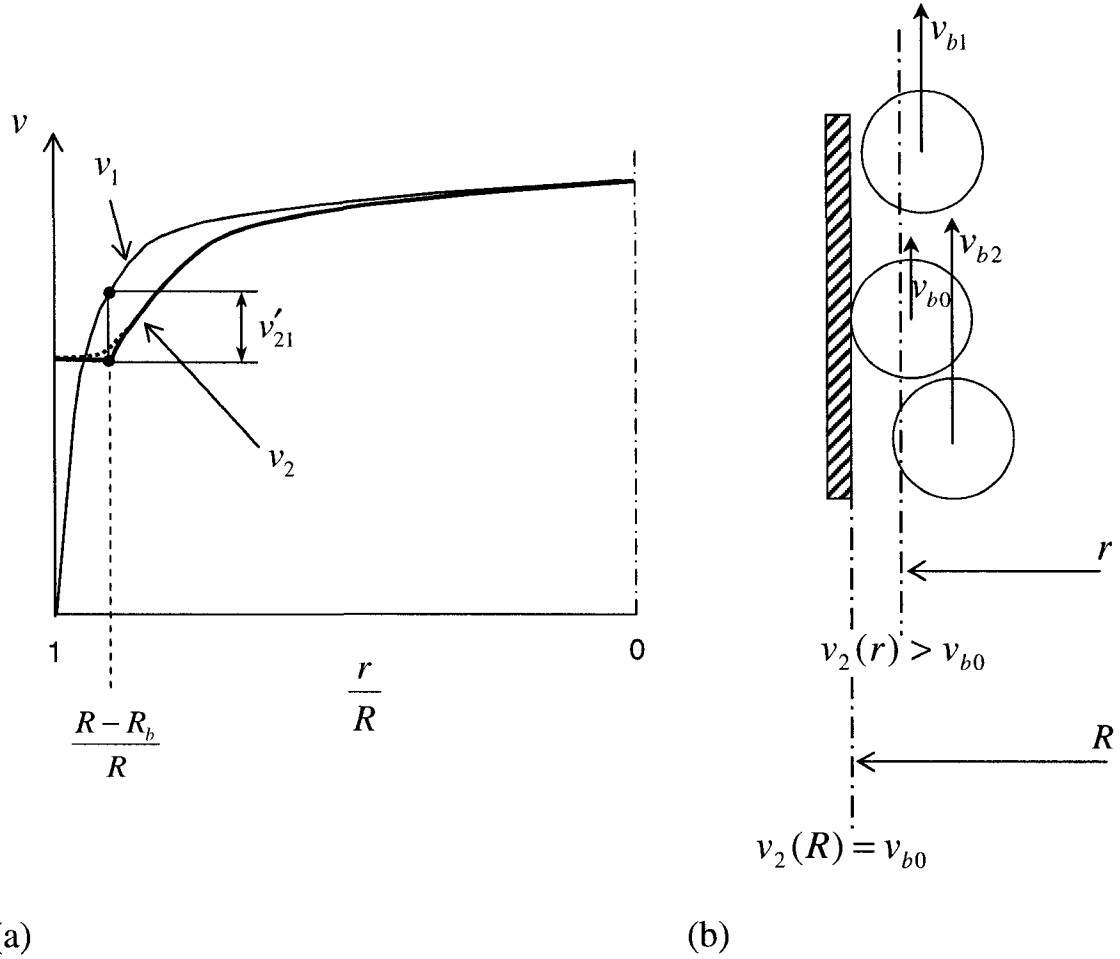


Fig. 6. Basic principles of finding of the gas velocity distribution.

Fig. 7 shows dimensionless relative velocity profiles  $v_{21}^* = (v_2 - v_1)/v_{10}$  numerically generated for three different bubble sizes by assuming the  $1/7^{\text{th}}$  power law profile,  $v_1 = v_{10}(1 - r/R)^{1/7}$ , for the liquid phase velocity. It can be seen that the value of the relative gas velocity decreases from the center towards the periphery of the channel, but near the wall it starts increasing quite rapidly and it becomes positive afterward. It

must be pointed out that due to the general nature of the present analysis, a similar behaviour of the gas relative velocity, independently of the flow orientation can be expected. Fig. 8 shows the distribution of the relative gas velocity in a vertical bubbly flow (Inoue et al., 1976) that confirms this conclusion.

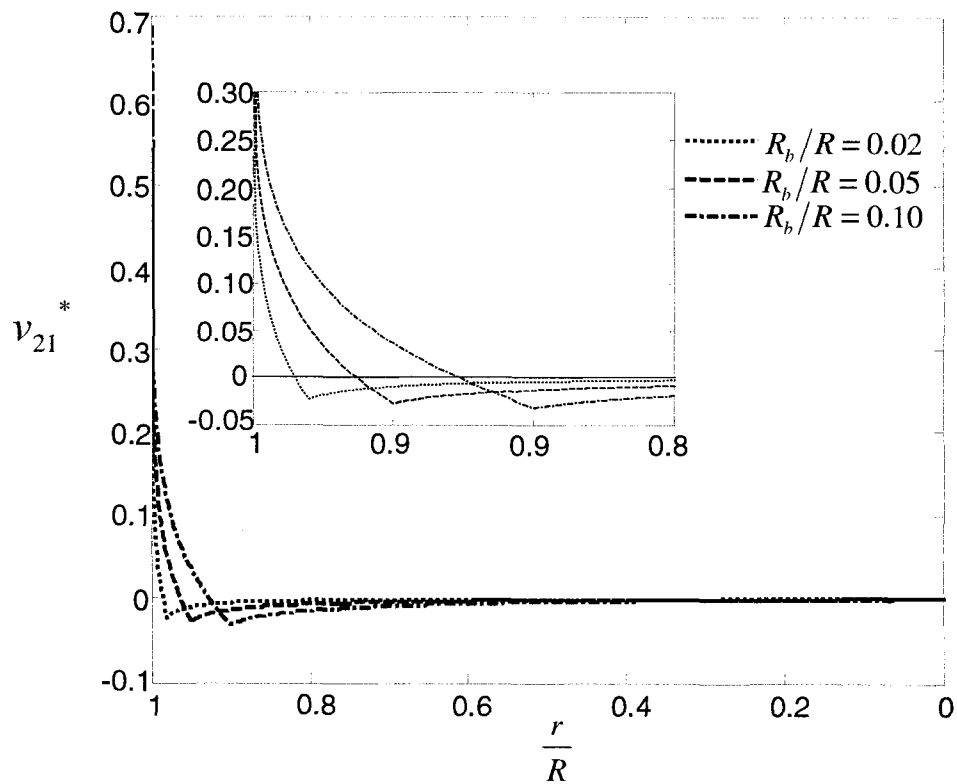


Fig. 7. Dimensionless relative gas velocity distributions

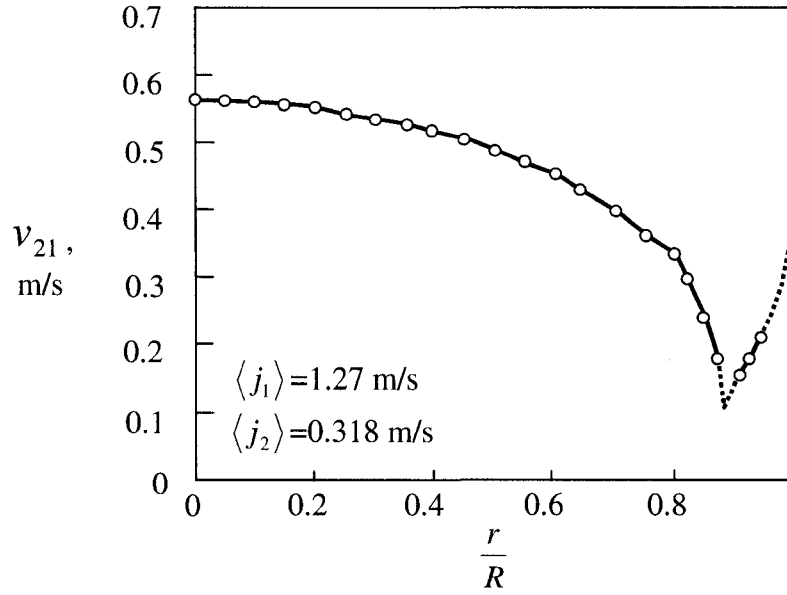


Fig. 8. Relative gas velocity distribution in a vertical upward bubbly flow (Inoue et al., 1976).

### 2.3 Flow distribution parameters

Most of the methods and/or correlations developed to predict the average void fraction are based on the drift flux model proposed by Zuber and Findlay (1965). In this model, the ratio of the volumetric flow quality  $\beta = Q_2 / (Q_1 + Q_2)$  to the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  is written as:

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} = C_0 + \frac{\langle \alpha V_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle}, \quad (6)$$

where the distribution parameter  $C_0$  has the following form:

$$C_0 = \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = \frac{\frac{1}{A} \int_A \alpha j dA}{\left[ \frac{1}{A} \int_A \alpha dA \right] \left[ \frac{1}{A} \int_A j dA \right]} \quad (7)$$

and the drift velocity of the gas  $V_{2j}$  is defined as:

$$V_{2j} = v_2 - j, \quad (8)$$

where  $j = v_1(1 - \alpha) + v_2\alpha$  is the volumetric flux density of the mixture,  $v_1$  and  $v_2$  are the actual velocities of the liquid and the gas phase respectively and  $A$  is the duct cross sectional area. The distribution parameter  $C_0$  depends on the profiles of  $j$  and  $\alpha$ ; thus, it characterises the integral slip. In turn, the void fraction weighted average drift velocity  $\bar{V}_{2j} = \langle \alpha V_{2j} \rangle / \langle \alpha \rangle$  to the mixture velocity  $\langle j \rangle$  ratio, determines the effect of the local slip.

The use of the drift flux model, however, is cumbersome due to both the necessity of a priori calculation of  $j$  and  $V_{2j}$ , and the incomplete dissociation of integral and local effects of the slip between the phases. For instance, in the case of uniform phase velocity profiles ( $v_1 = \text{Const}$ ;  $v_2 = \text{Const}$ ) an apparently obvious equality  $C_0 = 1$  is achieved only when  $v_1 = v_2 = \text{Const}$ .

Clark and Flemmer (1986), and Olekhovich and Pokhvalov (1986) have shown independently that it is suitable to introduce nonuniformity parameters which are based on real flow characteristics. These parameters are given by\*:

---

\* In Clark and Flemmer's work,  $\Phi_1 \equiv C_l$  and  $\Phi_2 \equiv C_g$ .



$$\Phi_1 = \frac{\langle v_1(1-\alpha)\alpha \rangle}{\langle v_1(1-\alpha) \rangle \langle \alpha \rangle} \quad (9)$$

and

$$\Phi_2 = \frac{\langle v_2 \alpha^2 \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle \langle \alpha \rangle}. \quad (10)$$

Thus, for a given void fraction profile, they quantify the non-uniformity of the phase velocity distributions. Using the definition of the volumetric flow quality:

$$\beta = \frac{\langle j_2 \rangle}{\langle j \rangle} = \frac{\langle v_2 \alpha \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle + \langle v_1(1-\alpha) \rangle}, \quad (11)$$

the ratio between the volumetric flow quality  $\beta$  and the average void fraction  $\langle \alpha \rangle$  can be expressed as (Olekhnovitch and Pokhvalov, 1989; see also the Appendix):

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} = C \left[ 1 + \frac{\tilde{V}_{21}}{\langle j \rangle} \right], \quad (12)$$

where

$$C = \frac{\Phi_1}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)}, \quad (13)$$

$$\tilde{V}_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} \langle v_{21}(1-\alpha) \rangle, \quad (14)$$

$$\Phi_{21} = \frac{\langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{\langle v_{21}(1-\alpha) \rangle \langle \alpha \rangle}. \quad (15)$$

In this expression the distribution parameter  $C$ , similarly to  $C_0$  in Eq. (6), determines the influence of the non-uniformity of local flow profiles on  $\beta/\langle \alpha \rangle$ ; thus, it

characterises the effect of the integral slip. In contrast to  $C_0$ , the distribution parameter  $C$  is a multiplication factor acting over the void fraction weighted average relative velocity between the phases, i.e., the local slip. Such a formulation of the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  relationship is physically more logical and it has a more convenient structure that permits experimentally determined distributions of  $v_1$ ,  $v_2$  and  $\alpha$  to be used without requiring a previous calculation of  $j$  and  $V_{2j}$ , as it is necessary with the drift flux model.

A comparison of Eqs. (6) and (12) yields:

$$C_0 = C + \frac{\langle\alpha V_{2j}\rangle}{\langle j\rangle} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{1 - \langle\alpha\rangle(\Phi_2 - \Phi_1)}. \quad (16)$$

This expression clearly shows that the drift flux distribution parameter  $C_0$  depends on the local slip  $\langle\alpha V_{2j}\rangle/\langle j\rangle$ . Thus, the drift flux model does not ensure, as it was mentioned above, a complete dissociation of the two slip components (i.e., local and integral). This fact significantly encumbers the fine analysis of the influence of the void fraction profile on the overall flow characteristics. Because of this reason, the model of Olekhovich and Pokhvalov (1989) is used to perform the present study.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

Kocamustafaogullari and Huang (1994) have shown that in the case of bubbly two-phase flows in a large-diameter round pipe, the liquid velocity profiles are very close to

those of turbulent flows. Therefore, only this type of profile was used in the present analysis. All parameters were determined using a trapezoidal numerical integration method. The comparison of the values obtained for a parabolic void fraction profile (profile 1 in Fig. 2) with the corresponding exact analytical solutions has shown that the absolute error of the method used to carry out the calculations does not exceed  $10^{-5}$ .

Figs. 9 to 12 show the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio, the distribution parameter  $C$  and the velocity ratio  $\tilde{V}_{21}/\langle j \rangle$  as a function of the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  for different void fraction profiles. For each profile, the value of  $\langle\alpha\rangle$  was calculated by assuming that the maximum local void fraction can change from 0.1 to 0.5. Therefore, the range of variation of the average void fraction differs for dissimilar profiles. In addition, each graph contains several plots that represent the behaviour of the aforementioned parameters for hypothetical two-phase flows constituted by spherical bubbles with different sizes. From these figures, it can be observed that for more or less symmetric void fraction profiles, the values of  $C$  and  $\beta/\langle\alpha\rangle$  are always greater than 1. However, when the void fraction distribution has a pronounced maximum near the upper wall of the pipe, both the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio and the distribution parameter  $C$  are less than 1 (Fig. 12). It is interesting to note that such values are characteristic of a void fraction profile with a maximum located at  $r/R = 0.75$ . This fact seems to confirm the experimental results of Kocamustafaogullari et al. (1994) (i.e.,  $\beta/\langle\alpha\rangle = 0.97$ ), obtained for horizontal bubbly flows with the maximum void fraction located at  $r/R = 0.8 - 0.9$ . Figs. 9a to 12a also

show  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratios calculated by assuming the absence of slip between phases (i.e., the lines noted by  $v_1 = v_2$ ). In all the cases,  $v_1 = v_2$  produces higher values of the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio. Thus, it can be concluded that such an assumption is susceptible to increase the calculated ratio of  $\beta/\langle\alpha\rangle$ . In turn, Figs. 9b to 12b show that for a given void fraction profile the value of the distribution parameter  $C$  seems to be practically independent of both the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  and the size of the bubble. For all the cases studied, the maximum variation of  $C$  does not exceed 0.2%. This behaviour is related to the fact that for low average void fractions, the distribution parameter  $C$  depends barely on the value of  $\langle\alpha\rangle$ , as shown from the definition of  $C$  that yields:

$$C = \frac{\Phi_1}{1 - \langle\alpha\rangle(\Phi_2 - \Phi_1)} \approx \Phi_1. \quad (17)$$

Fig. 13 shows that for given two-phase flow conditions, the dependence of  $C_0$  on  $\langle\alpha\rangle$  is much pronounced than that of  $C$ . Therefore, using the distribution parameter  $C$  instead of  $C_0$  will help to predict more easily  $\langle\alpha\rangle$ . This fact demonstrates the advantage of applying the proposed representation instead of the existing drift flux model.

Figs. 9c to 12c show the non-dimensional relative velocity  $\tilde{V}_{21}/\langle j \rangle$  as a function of the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$ . It can be seen that even though the local relative velocity close enough to the wall of the channel has a significant positive value (see Fig. 7), the void fraction weighted average relative velocity  $\tilde{V}_{21}$  is always negative. Concerning the

absolute values of the gas relative velocities, they are not quite high. According to calculations carried out for the range of flow conditions studied by Kocamustafaogullari et al. (1994), the experimentally obtained average local slip value ( $-0.093 \text{ m/s}$ ) is about 3 times higher than the predicted one ( $-0.032 \text{ m/s}$ ). However, it must be taken into consideration that the present results are based only on a single slip mechanism. In addition, it must be pointed out that the uncertainties of this kind of experimental data can be quite high, i.e., measured values can be significantly over-estimated.

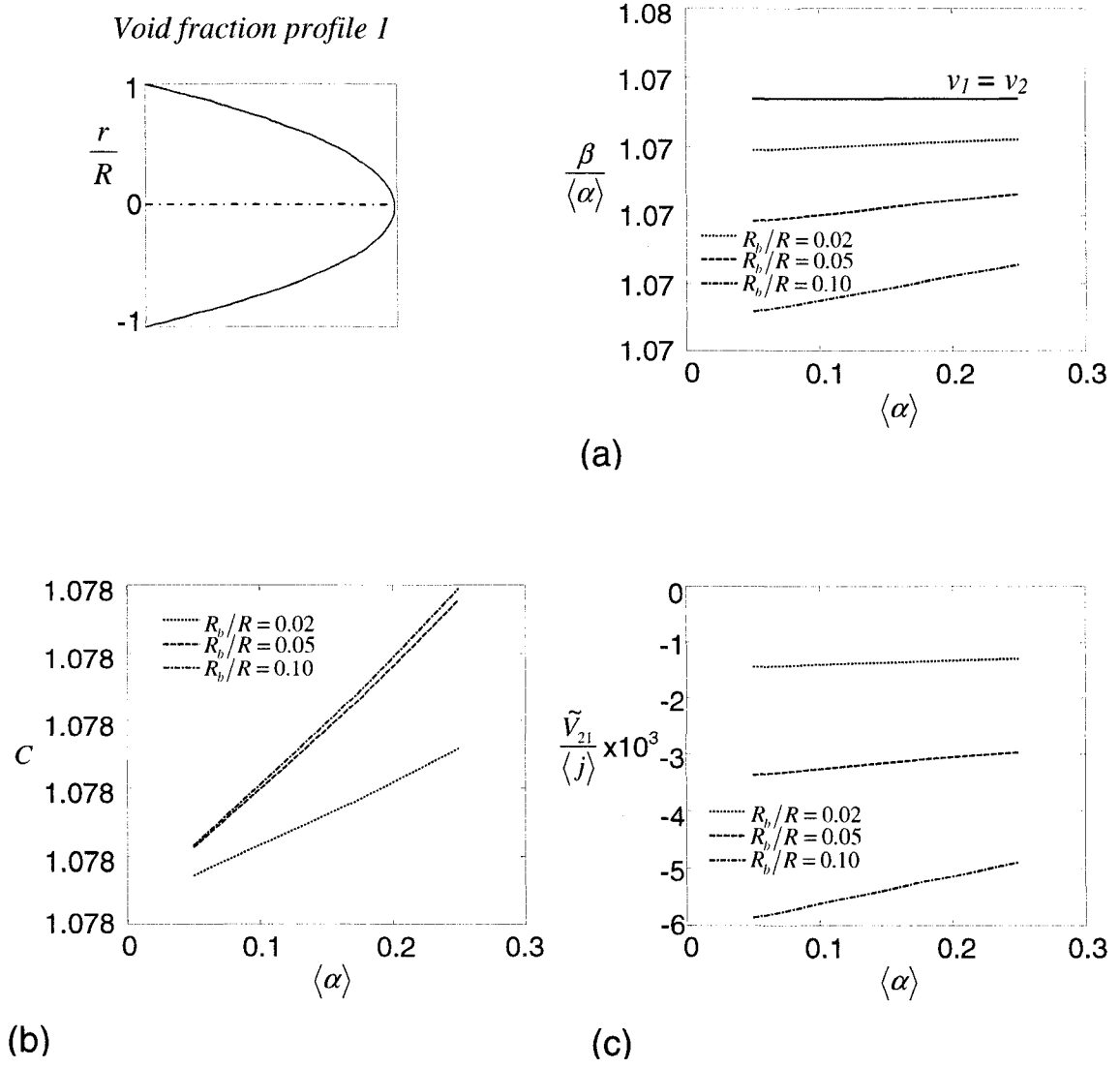


Fig. 9. Two-phase flow parameters as a function of  $\langle \alpha \rangle$  (profile 1)

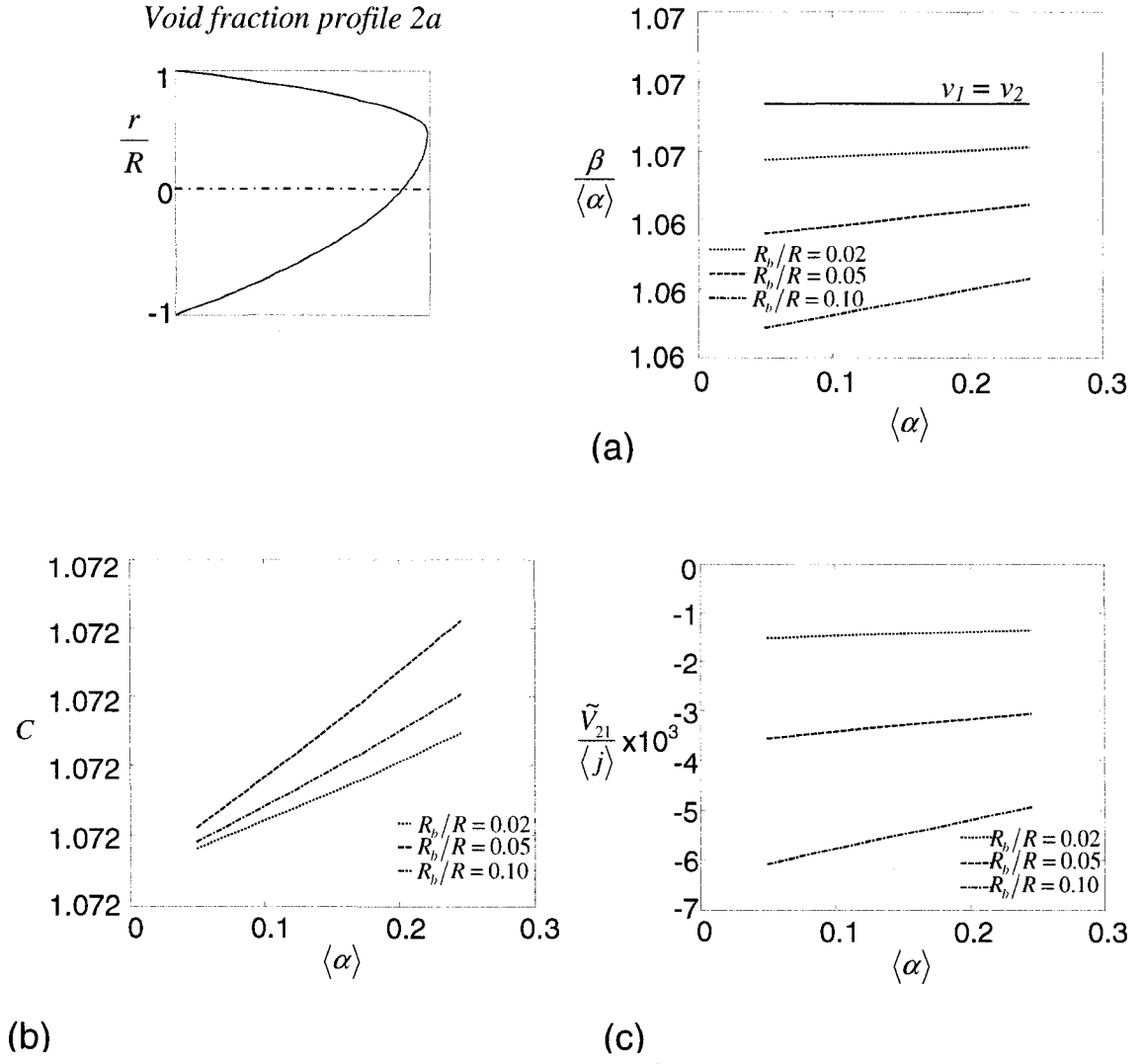


Fig. 10. Two-phase flow parameters as a function of  $\langle \alpha \rangle$  (profile 2a).

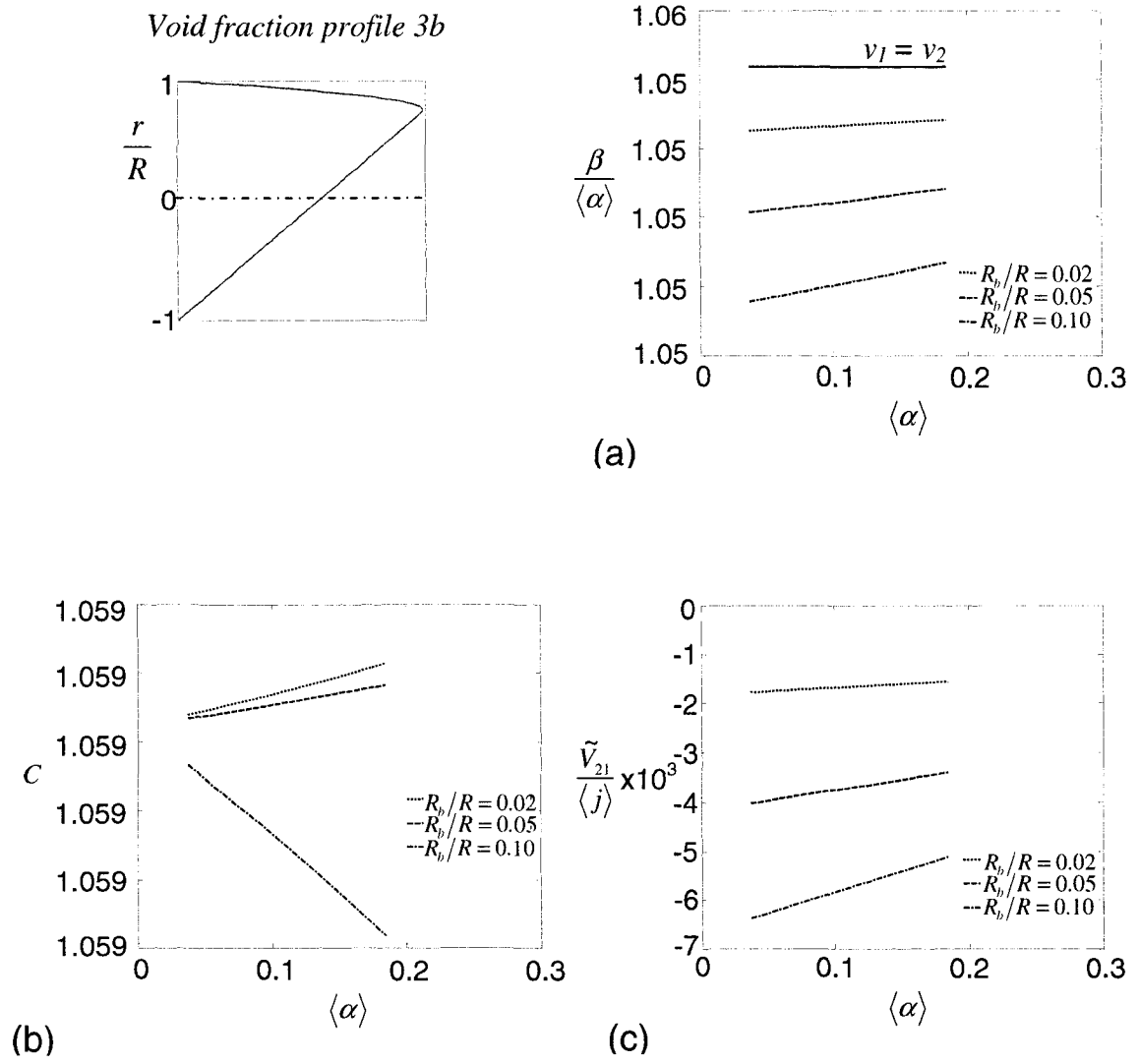


Fig. 11. Two-phase flow parameters as a function of  $\langle \alpha \rangle$  (profile 3b)



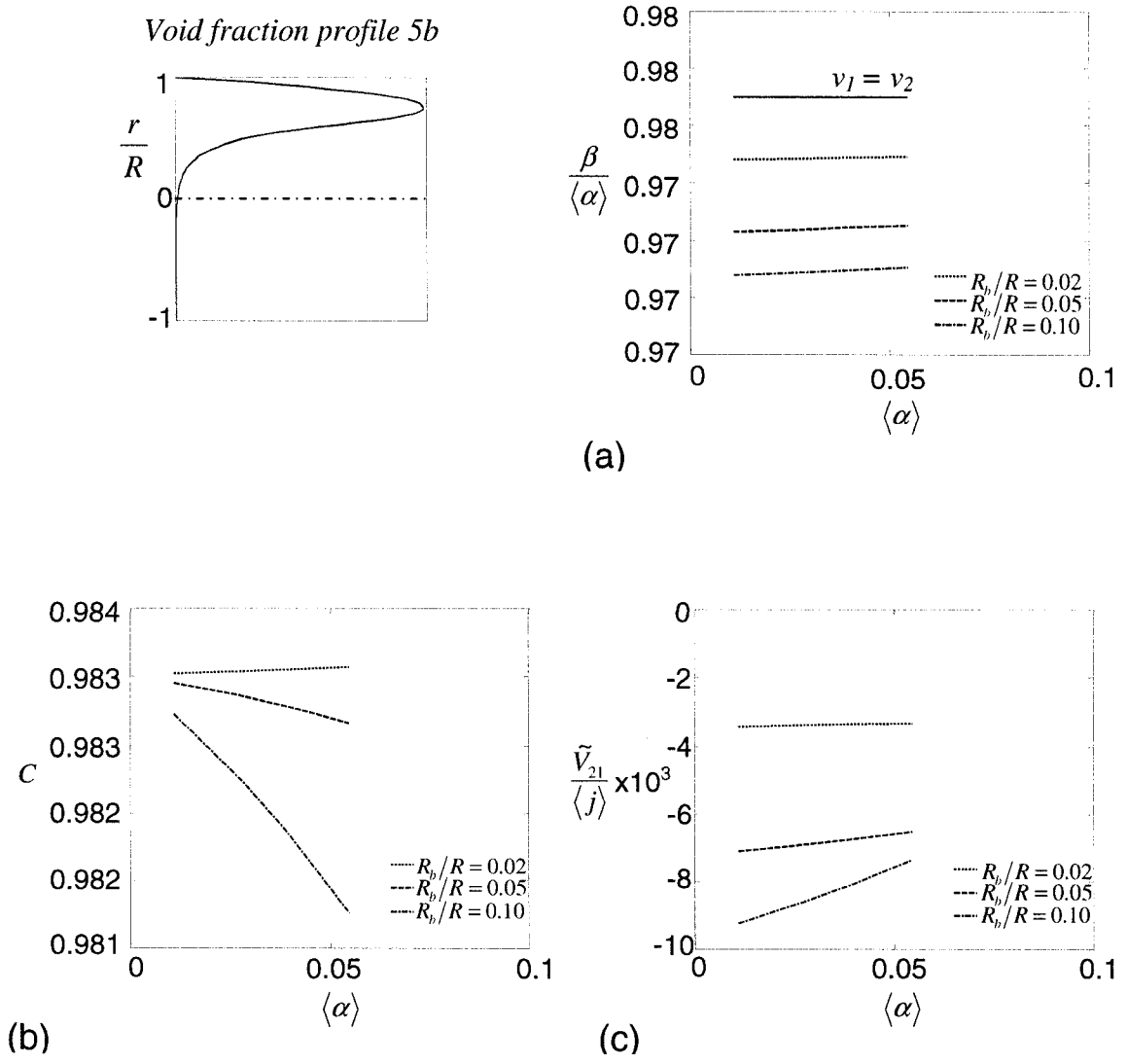


Fig. 12. Two-phase flow parameters as a function of  $\langle \alpha \rangle$  (profile 5b).

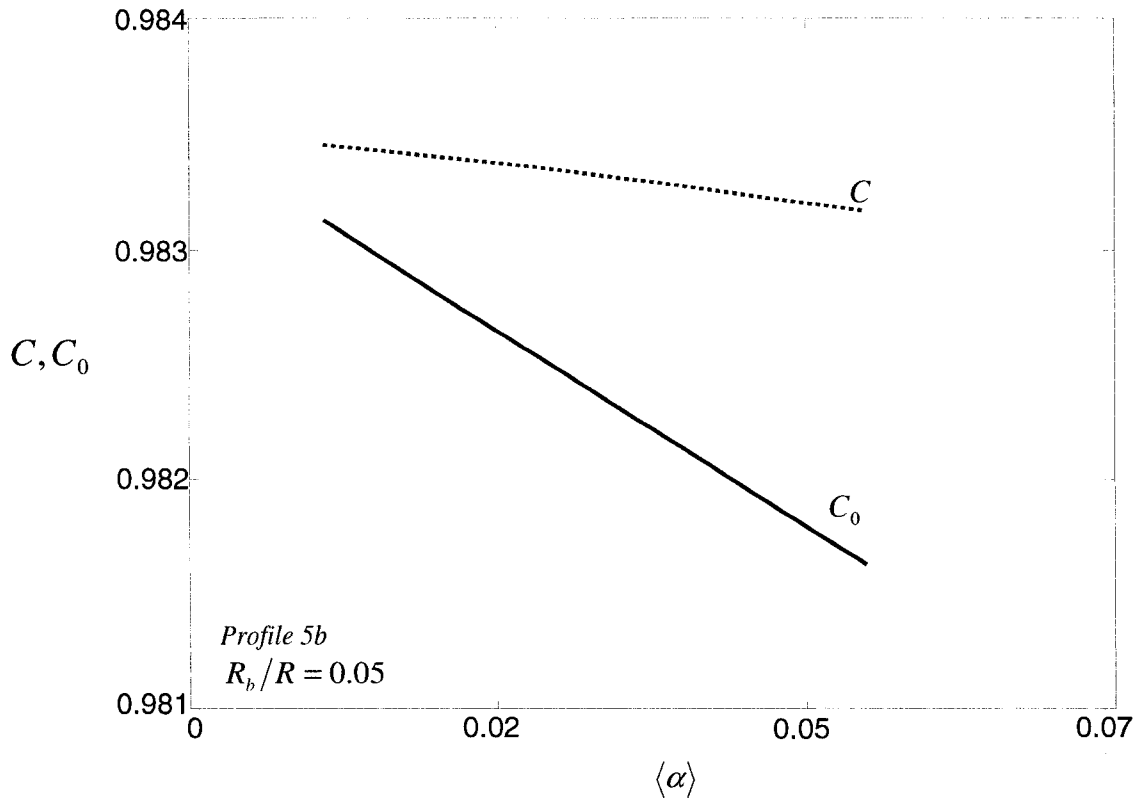


Fig. 13. Comparison of the two distribution parameters  $C$  and  $C_0$ .

As it was mentioned above, whatever the initial void fraction profile is, due to the bubble migration towards the upper wall of the horizontal channel, different profiles can occur along the pipe. Fig. 14 shows the results of calculations of such a flow development that start with a parabolic void fraction profile at the entrance of a channel (profile 1) which transforms into a noticeably gravity-skewed profile at the outlet (profile 5b). The  $\beta/\langle \alpha \rangle$  ratio is calculated for a constant volumetric flow quality equal to 0.05 in conjunction with an iterative procedure for obtaining the value of the maximum void fraction for each profile. Further, these calculations were performed assuming that the transformation from one void profile to another occurs smoothly over

the total length of the pipe. It can be seen that at the exit the  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio drops by 10%. Thus, there exists an apparent deceleration of the gas phase along the channel and a noticeable increase of  $\langle\alpha\rangle$ . Such a phenomenon must eventually be taken into consideration for conducting precise analysis of horizontal two-phase flows.

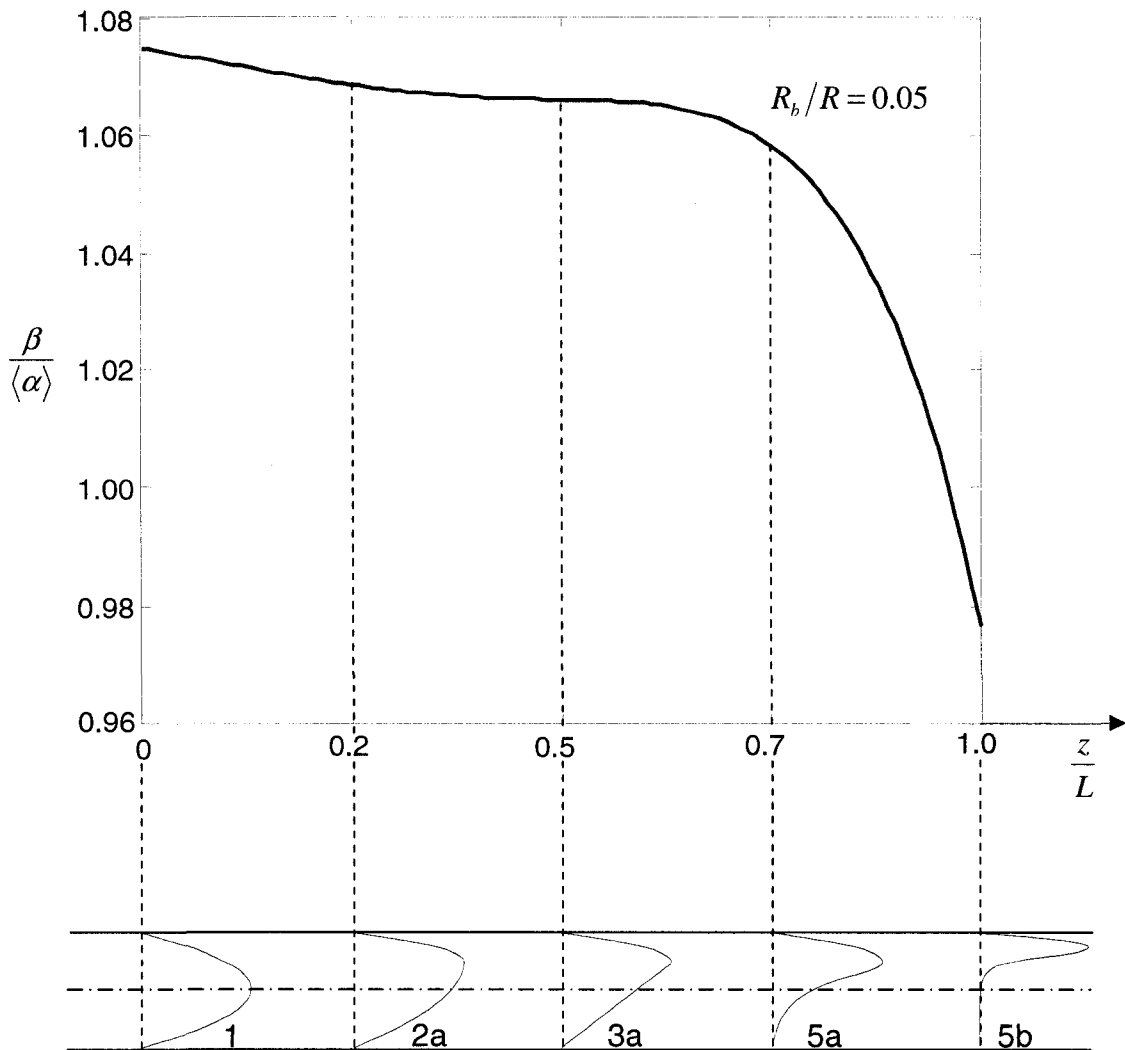


Fig. 14. Simulation of a void fraction profile development along a horizontal round pipe.

#### 4. CONCLUSIONS

A numerical experiment on the influence of the void fraction profile on the value of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  ratio in horizontal bubbly flows was carried out. The relative phase velocity was evaluated by modeling the movement of a single bubble in a flow of liquid having a non-uniform velocity distribution. A methodology was proposed in order to determine the effect of non-uniform local profiles on the two-phase flow  $\beta/\langle\alpha\rangle$  ratio. According to the presented analysis, the proposed approach better reflects both the effect of non-uniform flow and concentration profiles as well as the effect of the local relative velocity between the phases than the well known Zuber-Findlay drift flux model. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles with a pronounced maximum near the upper wall of a horizontal pipe, the value of the distribution parameter and consequently the value of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  ratio is less than one. Under the same void fraction conditions the void fraction weighted average relative velocity of the gas phase is negative.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was funded by the Hydro-Québec chair in nuclear engineering and the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC) discovery grants # 341896-07 and 41929-03.

## REFERENCES

- Andreussi, P., Pintus, S., Nydal, O.J., Sanchez Silva, F., 1991. Measurement of the mean gas velocity in horizontal bubbly flow. In: G.F. Hewitt, F. Mayinger & J.R. Riznic (Eds.), Phase-interface phenomena in multiphase flow, New York: Hemisphere, pp. 211-220.
- Andreussi, P., Paglianti, A., Silva, F.S., 1999. Dispersed bubble flow in horizontal pipes. Chem. Eng. Sci. 54, 1101-1107.
- Baker, J.L.L., Chao, B.T., 1965. An experimental investigation of air bubble motion in a turbulent water stream. AIChE Journal 11, 268-273.
- Dukler, A.E., Hubbard, M.G., 1975. A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes. Ind. Eng. Chem. Fundam. 14, 337-347.
- França, F., Lahey, R.T. Jr., 1992. The use of drift-flux techniques for the analysis of horizontal two-phase flows. Int. J. Multiphase Flow 18, 787-801.

- Haoues, L., Olekhnovich, A., Teyssedou, A., 2008. Influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe. Nucl. Eng. Des. 238, 1155-1158.
- Hewitt, G.W., Hall-Taylor, N.S., 1970. Annular Two-Phase Flow, Pergamon, Oxford.
- Iskandrani, A., Kojasoy, G., 2001. Local void fraction and velocity field description in horizontal bubbly flow. Nucl. Eng. Des. 204, 117-128.
- Inoue, A., Aoki, S., Koga, T., Yaegashi, H., 1976. Void fraction, bubble and liquid velocity profiles of two-phase flow in a vertical pipe. Trans. JSME. 42, 2521-2531.
- Kocamustafaogullari, G., Wang, Z., 1991. An experimental study on local interfacial parameters in a horizontal bubbly two-phase flow. Int. J. Multiphase Flow 17, 553-572.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., 1994. Internal structure and interfacial velocity development for bubbly two-phase flow. Nucl. Eng. Des. 151, 79-101.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., Razi, J., 1994. Measurement and modeling of average void fraction, bubble size and interfacial area. Nucl. Eng. Des. 148, 437-453.
- Lewis, S., Fu, W.L., Kojasoy, G., 2002. Internal flow structure description of slug flow-pattern in a horizontal pipe. Int. J. Heat and Mass Transfer 45, 3897-3910.
- Olekhnovitch, A.N., Pokhvalov Yu.E., 1986. Determination of two-phase flow distribution parameters, in: V.I. Subbotin (ed.), Teplofizika Yaderno- Energeticheskikh Ustanovok (Thermophysics of Nuclear Power Plants), Energoatomizdat, Moscow, Russia, pp. 72-78.
- Olekhnovich, A.N., Pokhvalov, Y.E., 1989. An equation for calculating true volumetric void fraction. Thermal Engineering 36 (11), 636-639.

- Sharma, S., Lewis, S., Kojasoy, G., 1998. Local studies in horizontal gas-liquid slug flow. Nucl. Eng. Des. 184, 305-318.
- Smissaert, G.E., 1963. Two-component two-phase flow parameters for low circulation rates. ANL-6755.
- Taitel, Y., Dukler, A.E., 1977. A model for slug frequency during gas-liquid flow in horizontal and near horizontal pipes. Int. J. Multiphase Flow 3, 585-596.
- Ujang, P.M., Lawrence, C.J., Hale, C.P., Hewitt, G.F., 2006. Slug initiation and evolution in two-phase horizontal flow. Int. J. Multiphase Flow 32, 527-552.
- Yang, A.S., Kuo, T.C., Ling, P.H., 2003. Application of neural networks to prediction of phase transport characteristics in high-pressure two-phase turbulent bubbly flows. Nucl. Eng. Des. 223, 295-313.
- Yang, J., Zhang, M., Zhang, C., Su, Y., Zhu, X., 2004. Quasi 3-D measurements of turbulence structure in horizontal air-water bubbly flow. Nucl. Eng. Des. 227, 301-312.
- Zuber, N., Findlay, J.A., 1965. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. Trans. ASME, J. Heat Transfer 87, 453-468.

## APPENDIX

The mathematical derivation of the drift flux model is quite simple. The derivation of the relative velocity model is, however, more complex; thus it should be given in more detail. This development can be written down as:

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} &= \frac{\langle v_2 \alpha \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \\
 &= \frac{\langle v_2 \alpha \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_2 (1-\alpha) \alpha \rangle \langle v_1 (1-\alpha) \rangle + \langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle \langle v_2 \alpha \rangle}{\langle v_2 (1-\alpha) \alpha \rangle \langle v_1 (1-\alpha) \rangle + \langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle \langle v_2 \alpha \rangle} \\
 &= \frac{\langle v_2 \alpha \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\frac{\langle v_2 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle} + \frac{\langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle}}{\frac{\langle v_2 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle} + \frac{\langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle}} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_2 (1-\alpha) \alpha \rangle + \frac{\langle v_2 \alpha \rangle \langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle}}{1 - \frac{\langle v_2 \alpha^2 \rangle}{\langle v_2 \alpha \rangle} + \frac{\langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle}} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle + \langle v_{21} (1-\alpha) \alpha \rangle + \frac{\langle v_2 \alpha \rangle \langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle}}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_1 (1-\alpha) \alpha \rangle \left( 1 + \frac{\langle v_2 \alpha \rangle}{\langle v_1 (1-\alpha) \rangle} \right) + \langle v_{21} (1-\alpha) \alpha \rangle}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)}
 \end{aligned} \tag{A1}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_1(1-\alpha)\alpha \rangle}{\langle v_1(1-\alpha) \rangle} \frac{(\langle v_1(1-\alpha) \rangle + \langle v_2\alpha \rangle) + \langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)} \\
&= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\langle v_1(1-\alpha)\alpha \rangle}{\langle v_1(1-\alpha) \rangle} \frac{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle + \langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)} \\
&= \frac{1}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \frac{\Phi_1 \langle \alpha \rangle \langle j \rangle + \langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)} \\
&= \frac{\Phi_1}{1 - \langle \alpha \rangle (\Phi_2 - \Phi_1)} \left[ 1 + \frac{\langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{\Phi_1 \langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \right] \\
&= C \left[ 1 + \frac{\langle v_{21}(1-\alpha)\alpha \rangle}{\Phi_1 \langle \alpha \rangle \langle j \rangle} \right] \\
&= C \left[ 1 + \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1} \frac{\langle v_{21}(1-\alpha) \rangle}{\langle j \rangle} \right] \\
&= C \left[ 1 + \frac{\tilde{V}_{21}}{\langle j \rangle} \right]
\end{aligned}$$

## CONCLUSION

L'étude de la thermo-hydraulique des systèmes diphasiques, très largement répandus dans l'industrie, est absolument nécessaire pour effectuer l'optimisation des systèmes énergétiques dont l'enjeu est de plus en plus grand aujourd'hui. Même si les processus qui ont lieu dans ces écoulements soulèvent encore des questions, la recherche continue. En effet, l'un des plus grands avantages des systèmes diphasiques est le transport de chaleur utilisé dans les centrales thermiques et nucléaires à l'aide des écoulements bouillants. De plus, nous avons pu constater au cours de notre étude que l'orientation de l'écoulement a un impact important sur ses paramètres. Bien qu'un peu plus délaissé dans la littérature scientifique, les écoulements diphasiques horizontaux présentent une particularité vis-à-vis des écoulements verticaux : la forte asymétrie de la distribution du taux vide.

Justement, c'est le taux de vide qui est probablement le plus caractéristique des écoulements diphasiques. D'où l'intérêt triple de notre recherche : étudier l'influence de la structure interne des écoulements **par bulle** orientés **horizontalement** sur le **taux de vide**.

Si l'estimation du taux de vide est primordiale pour les processus industriels, nous ne sommes évidemment pas les premiers à l'avoir étudié. Nous avons présenté dans ce mémoire (Chapitre 1) le modèle le plus répandu et le plus utilisé dans ce domaine : le modèle à écart de vitesse proposé par Zuber et Findlay en 1965.

Après avoir montré l'avantage et l'intérêt de ce modèle, nous nous sommes penchés sur une première étude visant à analyser numériquement et avec rigueur l'influence du profil du taux de vide sur le paramètre de distribution  $C_0$  (« Influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe », Chapitre 2). Il a été montré que pour des profils de taux de vide non-symétriques, ce qui arrive normalement en écoulement horizontal, le paramètre de distribution peut être inférieur à l'unité. Dans ce cas, le titre volumique  $\beta$  peut être inférieur au taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$ .

La conclusion précédente sur le rapport  $\beta/\langle \alpha \rangle$  a pu être faite directement à partir des résultats sur le paramètre de distribution  $C_0$  car lors de cette première étude, le glissement entre les phases a été négligé. C'est pourquoi nous avons proposé dans notre seconde étude un modèle basé sur le mouvement d'une seule bulle au sein d'un champ de vitesse non-uniforme afin de modéliser la distribution de vitesse du gaz et ainsi prendre en compte le glissement. D'autre part, après une analyse fine du modèle à écart de vitesse, nous avons pu constater qu'il présentait certains défauts comme le fait qu'il

ne dissociait pas adéquatement les deux composantes du glissement (glissement intégral et local). Donc nous avons utilisé un tout autre modèle (modèle à vitesse relative), qui reflète beaucoup mieux l'effet la non-uniformité des profils de vitesse et de concentration sur le glissement (article : « Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction », Chapitre 3). Cette analyse a montré que, dans le cas de profils de taux de vide fortement déformés avec un maximum très proche de la paroi supérieure du canal, le titre volumique  $\beta$  pouvait être plus petit que le taux de vide moyen  $\langle \alpha \rangle$ . Cette relation entre  $\beta$  et  $\langle \alpha \rangle$  est conditionnée par le fait que le paramètre de distribution correspondant  $C$  est plus petit que un, tandis que la vitesse relative moyenne pondérée par le taux de vide de la phase gazeuse est négative. Rappelons également que la diminution importante de la valeur du rapport  $\beta/\langle \alpha \rangle$  le long d'un canal horizontal est un phénomène dont il faut absolument tenir compte pour l'analyse de ces écoulements lors du design et du dimensionnement d'équipements industriels.

Finalement, plusieurs prolongements de l'étude actuelle sont envisageables :

- utilisation du modèle à vitesse relative proposé pour la prédiction du taux de vide ainsi que pour l'analyse et l'interprétation de résultats expérimentaux ;
- développement du système d'équations de conservation (de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) décrivant les écoulements diphasiques basé sur le modèle à vitesse relative ;

- réalisation d'un programme expérimental afin de développer des corrélations pour l'évaluation du paramètre de distribution  $C$  et de la vitesse caractéristique  $\tilde{V}_{21}$  en particulier pour les écoulements horizontaux et voire pour les écoulements verticaux.

## BIBLIOGRAPHIE

Abou-Zeid, P., (2002). *Calcul du coefficient  $C_0$  à partir des profils radiaux de taux de vide et les profils de vitesse liquide et gaz*. P.F.E., École Polytechnique de Montréal, Canada.

Andreussi, P., Pintus, S., Nydal, O.J., & Sanchez Silva, F., (1991). Measurement of the mean gas velocity in horizontal bubbly flow. In: G.F. Hewitt, F. Mayinger & J.R. Riznic (Eds.), *Phase-interface phenomena in multiphase flow*, New York: Hemisphere, pp. 211-220.

Andreussi, P., Paglianti, A., & Silva, F.S., (1999). Dispersed bubble flow in horizontal pipes. *Chemical Engineering Science*, 54, 1101-1107.

Auton, T.R., (1987). The lift force on a spherical body in a rotational flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 183, 199-218.

Baker, J.L.L., & Chao, B.T., (1965). An experimental investigation of air bubble motion in a turbulent water stream. *AIChE Journal* 11, 268-273.

- Bhaga, D., & Weber, M.E., (1972). Holdup in vertical two and three phase flow. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 50, 323.
- Brown, F.C., Gomezplata, A., & Price, J.D., (1969). A model to predict void fraction in two-phase flow. *Chemical Engineering Science*, 24, 1483.
- Chen, Y., (2001). *Modeling gas-liquid flow in pipes: flow pattern transitions and drift-flux modeling*. M.Sc., Stanford University, United States of America.
- Cherukat, P., & McLaughlin, J.B., (1990). Wall-induced lift on a sphere. *International Journal of Multiphase Flow*, 16, 899-907.
- Cherukat, P., & McLaughlin, J.B., (1994). The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 263, 1-18.
- Cherukat, P., McLaughlin, J.B., & Dandy, D.S., (1999). A computational study of the inertial lift on a sphere in a linear shear flow field. *International Journal of Multiphase Flow*, 25, 15-33.
- Clark, N., & Flemmer, R., (1983). Narrow bore deep shaft reactors. *CHEMSA* 9, 62.

Clark, N., & Flemmer, R., (1985). Predicting the holdup in two-phase bubble upflow and downflow using the Zuber and Findlay drift-flux model. *AIChE Journal* 31, 500-503.

Clark, N., & Flemmer, R., (1986). The effect of varying gas voidage distributions on average holdup in vertical bubble flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12, 299-302.

Dukler, A.E., & Hubbard, M.G., (1975). A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes. *Industrial & engineering chemistry fundamentals*, 14, 337-347.

França, F., & Lahey, R.T. Jr., (1992). The use of drift-flux techniques for the analysis of horizontal two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 18, 787-801.

Haoues, L., Olekhovich, A., & Teyssedou, A., (2008). Influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  for a bubbly gas-liquid flow in a horizontal round pipe. *Nuclear Engineering & Design*, 238, 1155-1158.

Haoues, L., Olekhovich, A., & Teyssedou, A., (2008). Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction. Soumis à *Nuclear Engineering & Design*.



Haoues, L., Olekhnovich, A., & Teyssedou, A., (2008). Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction. *International Conference Of Nuclear Engineering, Orlando (Floride)*, ICONE 16-48153.

Hewitt, G.W., & Hall-Taylor, N.S., (1970). *Annular Two-Phase Flow*, Pergamon, Oxford.

Hibiki, T., & Ishii, M., (2003). One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, 4935-4948.

Hibiki, T., & Ishii, M., (2007). Lift force in bubbly flow systems. *Chemical Engineering Science*, 62, 6457-6474.

Iskandrani, A., & Kojasoy, G., (2001). Local void fraction and velocity field description in horizontal bubbly flow. *Nuclear Engineering & Design*, 204, 117-128.

Inoue, A., Aoki, S., Koga, T., & Yaegashi, H., (1976). Void fraction, bubble and liquid velocity profiles of two-phase flow in a vertical pipe. *Transaction of Japanese Society of Mechanical Engineers*, 42, 2521-2531.

Ishii, M., (1977). One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes. *Argonne National Laboratory Report*, ANL-77-47.

Ishii, M., & Chawla, T.C., (1979). Local drag laws in dispersed two-phase flow. *Argonne National Laboratory Report*, ANL-79-105 (NUREG/CR-1230).

Ishii, M., & Zuber, N., (1979). Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. *AIChE Journal* 25, 843-855.

Ishii, M., & Mishima, K., (1980). Study of two-fluid model and interfacial area. *Argonne National Laboratory Report*, ANL-80-11 (NUREG/CR-1873).

Ishii, M., & Hibiki, T., (2006). *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. New York, Springer.

Kocamustafaogullari, G., & Wang, Z., (1991). An experimental study on local interfacial parameters in a horizontal bubbly two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 17, 553-572.

Kocamustafaogullari, G., & Huang, W.D., (1994). Internal structure and interfacial velocity development for bubbly two-phase flow. *Nuclear Engineering & Design*, 151, 79-101.

Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., & Razi, J., (1994). Measurement and modeling of average void fraction, bubble size and interfacial area. *Nuclear Engineering & Design*, 148, 437-453.

Kolev, N. I., (2002). *Multiphase Flow Dynamics. 1, Fundamentals*. Berlin, Springer.

Kroeger, P.G., & Zuber, N., (1968). Average volumetric concentration in two-phase flow through rectangular channels. *Journal of Heat Transfer* 90, 491-493.

Kurose, R., Misumi, R., & Komori, S., (2001). Drag and lift forces acting on a spherical bubble in a linear shear flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 27, 1247-1258.

Levich, V.G., (1962). Chapter VIII. Motion of Drops and Bubbles in Fluid Media. In Neal R. Amundson. *Physicochemical Hydrodynamics* (pp.395-470). Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Lewis, S., Fu, W.L., & Kojasoy, G., (2002). Internal flow structure description of slug flow-pattern in a horizontal pipe. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 3897-3910.

Lorenzi, A., & Sotgia, G., (1978). Comparative investigation of some characteristic quantities of two phase cocurrent upward and downward flow. In *Two-phase transport and reactor safety*, Veziroglu and Kakac, eds. Washington, D.C.: Hemisphere.

Lyczkowski, R.W., (1978). Theoretical bases of the drift-flux field equation and vapor drift velocity. *6<sup>th</sup> International heat transfer conference, Toronto* (Vol.1, pp.339-344). Washington, Hemisphere Pub. Corp.

Martin, C.S., (1976). Vertically downward two phase slug flow. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 98, 715.

Merle, A., Legendre, D., & Magnaudet, J., (2005). Forces on a high-Reynolds-number spherical bubble in a turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 532, 53-62.

Olekhnovitch, A.N., & Pokhvalov, Y.E., (1986). Determination of two-phase flow distribution parameters. In: V.I. Subbotin (ed.), *Teplofizika Yaderno- Energeticheskikh Ustanovok* (Thermophysics of Nuclear Power Plants), Energoatomizdat, Moscow, Russia, pp. 72-78.

Olekhnovitch, A.N., & Pokhvalov, Y.E., (1989). An equation for calculating true volumetric void fraction. *Thermal Engineering* 36 (11), 636-639.

Omgba-Essama, C., (2004). *Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified & Slug Flow Regimes)*. Ph.D. Thesis, Cranfield University, United Kingdom.

Oshinowo, T., & Charles, M.E., (1974). Vertical two phase flow. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52, 438.

Sharma, S., Lewis, S., & Kojasoy, G., (1998). Local studies in horizontal gas-liquid slug flow. *Nuclear Engineering & Design*, 184, 305-318.

Smissaert, G.E., (1963). Two-component two-phase flow parameters for low circulation rates. *Argonne National Laboratory Report*, ANL-6755.

Spelt, P.D.M., & Biesheuvel, A., (1997). On the motion of gas bubbles in homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 336, 221-244.

Stewart, C.W., (1995). Bubble interaction in low-viscosity liquids. *International Journal of Multiphase Flow*, 21, 1037-1046.

Taitel, Y., & Dukler, A.E., (1977). A model for slug frequency during gas-liquid flow in horizontal and near horizontal pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, 3, 585-596.

Teyssedou, A., (2007). *Thermohydraulique des systèmes diphasiques* (Cours ENE6002). Canada, École Polytechnique de Montréal.

Thomas, N. H., Auton, T. R., Sene, K. J., & Hunt, J. C. R., (1984). *Entrapment and transport of bubbles in plunging water*. In *Gas Transfer at Water Surfaces* (ed. W. Brutsaert & G. H. Jurka), pp. 255-268. D. Reidel.

Todreas, N.E., & Kazimi, M.S., (1990). *Nuclear Systems*. New York, Hemisphere Pub. Corp.

Ujang, P.M., Lawrence, C.J., Hale, C.P., & Hewitt, G.F., (2006). Slug initiation and evolution in two-phase horizontal flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 32, 527-552.

Wallis, G.B., (1969). *One-dimensional Two-phase Flow*. U.S.A: McGraw-Hill, Inc.

Yang, A.S., Kuo, T.C., & Ling, P.H., (2003). Application of neural networks to prediction of phase transport characteristics in high-pressure two-phase turbulent bubbly flows. *Nuclear Engineering Design*, 223, 295-313.

Yang, J., Zhang, M., Zhang, C., Su, Y., & Zhu, X., (2004). Quasi 3-D measurements of turbulence structure in horizontal air-water bubbly flow. *Nuclear Engineering Design*, 227, 301-312.

Zuber, N., & Findlay, J.A., (1965). Average volumetric concentration in two-phase flow systems. Trans. ASME, *Journal of Heat Transfer*, 87, 453-468.

Zuber, N., Staub, F.W., Bijwaard, G., & Kroeger, P., (1967). Steady state and transient void fraction in two-phase flow systems. *General Electric Report*, GEAP 5417.

Zun, I., Richter, H.J., & Wallis, G.B., (1975). The transverse migration of bubbles in vertical two-phase flow. Dartmouth College, Thayer School of Engineering, Hanover.

## ANNEXE I

Code source utilisé pour effectuer les calculs du premier article :

Code de programmation des profils de taux de vides :

```
function F0=profile0(y)
format long
F0=1-y.^2;

function F1=profile1(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=0.5
        F1(p)=-4/9*y(p).^2+4/9*y(p)+8/9;
    elseif y(p)>=0.5 & y(p)<=1
        F1(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end

function F2=profile2(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=0.75
        F2(p)=-16/49*y(p).^2+24/49*y(p)+40/49;
    elseif y(p)>=0.75 & y(p)<=1
        F2(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
    end
end

function F3=profile3(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=sqrt(2)-1
        F3(p)=-4*(2*sqrt(2)-3)*y(p)-4*(2*sqrt(2)-3);
```



```

        elseif y(p) >= sqrt(2)-1 & y(p) <= 1
            F3(p) = -4*y(p).^2 + 4*y(p);
        end
    end
end

```

```

function F4=profile4(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p) >= -1 & y(p) <= sqrt(3)-1
        F4(p) = 8*(7-4*sqrt(3))*(y(p)+1);
    elseif y(p) >= sqrt(3)-1 & y(p) <= 1
        F4(p) = -16*y(p).^2 + 24*y(p) - 8;
    end
end
end

```

```

function F5=profile5(y)
format long
i=-0.6428571429;
j=0.1865433673;
k=0.9107142857;
l=0.25;
for p=1:length(y)
    if y(p) >= -1 & y(p) <= 1
        F5(p) = -sqrt(i*y(p)+j)+k;
    elseif y(p) >= 1 & y(p) <= 1
        F5(p) = -4*y(p).^2 + 4*y(p);
    end
end
end

```

```

function F6=profile6(y)
format long
i=-0.2792727273;
j=0.1684099174;
k=0.6690909091;
l=0.6;
for p=1:length(y)
    if y(p) >= -1 & y(p) <= 1
        F6(p) = -sqrt(i*y(p)+j)+k;
    elseif y(p) >= 1 & y(p) <= 1
        F6(p) = -16*y(p).^2 + 24*y(p) - 8;
    end
end
end

```

```

function F7=profile7(y)
format long
a=0.4125687304;

```

```

b=2.557647317;
c=-0.03196864229;
g=0.25;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=g
        F7(p)=a*exp(b*y(p))+c;
    elseif y(p)>=g & y(p)<=1
        F7(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end
end

```

```

function F8=profile8(y)
format long
a=0.007109998068;
b=7.4999539915;
c=-0.000003932610033;
g=0.6;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=g
        F8(p)=a*exp(b*y(p))+c;
    elseif y(p)>=g & y(p)<=1
        F8(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
    end
end
end

```

```

function alpha=surfparabolique(x,y,pas,F)
%construction de la surface en juxtaposant des paraboles de sommet F(h)
et
%s'annulant sur les bords du cercle
format long
h=-1:pas:1;
%On fait varier h pour pouvoir construire plusieurs parabole (une
parabole
%pour chaque h)
for i=1:length(h)
    %calcul des coefficient de la parabole
    if h(i)^2==1
        a=0;
    else
        a=-F(i)/(1-h(i)^2);
    end
    b=0;
    c=F(i);
    for k=1:length(y(:,1))
        if y(k,1)==h(i) %ce qui correspond a un plan perpendiculaire a
la section du tube
            indice=k;
            parabole(k,:)=a*x(1,:).^2+b*x(1,:)+c; %ici on extrait la
parabole a l'indice k d'un cylindre parabolique

```

```

%         else parabole(k,:)=zeros(length(y(:,1)),1) %peut etre
supprimé plus tard
    end
    end
    alpha(i,:)=parabole(indice,:); %on juxtapose les paraboles dont on
avait memoriser l'indice k
    for j=1:length(x(1,:))
        if alpha(i,j)<=0
            alpha(i,j)=0; %pour avoir des valeurs nul en dehors du
disque
        end
    end
end
% alpha(1,:)=0;
% alpha(end,:)=0;

```

Code de programmation des profils de vitesse :

```

function sn=surf_vn(x,y,n)
format long
rayon=1;
sn=(1-sqrt(x.^2+y.^2)).^(n);
for j=1:length(y(:,1))
    for i=1:length(x(1,:))
        if x(i,j)^2+y(i,j)^2>=rayon
            sn(i,j)=0; %pour avoir des valeurs nul en dehors du disque
        end
    end
end
end

```

Code de programmation du calcul de  $C_0$  :

```

clear all
clc
format long e
rayon=1;
pas=2*10^-2;
[X,Y]=meshgrid(-1:pas:1,-1:pas:1);
N=abs(X(1,1)-X(1,end))/pas+1;
n=[1/2 1/4 1/6 1/8 1/10];
F0=profile8(-1:pas:1);
alpha0=surfparabolique(X,Y,pas,F0);

```

```

for k=1:length(n)
vitesse=surf_vn(X,Y,n(k));
for i=2:2:N-1
    for j=2:2:N-1

Ja0(j,i)=pas^2/3*(alpha0(j+1,i)+alpha0(j,i+1)+8*alpha0(j,i)+alpha0(j-1,i)+alpha0(j,i-1));

Jv(j,i)=pas^2/3*(vitesse(j+1,i)+vitesse(j,i+1)+8*vitesse(j,i)+vitesse(j-1,i)+vitesse(j,i-1));

Ja0v(j,i)=pas^2/3*(alpha0(j+1,i)*vitesse(j+1,i)+alpha0(j,i+1)*vitesse(j,i+1)+8*alpha0(j,i)*vitesse(j,i)+alpha0(j-1,i)*vitesse(j-1,i)+alpha0(j,i-1)*vitesse(j,i-1));
    end
end
A0=sum(sum(Ja0));
V=sum(sum(Jv));
A0V=sum(sum(Ja0v));

alphamoyen0=A0/(pi*rayon^2);
vitessesemoyen=V/(pi*rayon^2);
avmoyen0=A0V/(pi*rayon^2);
C0a0v(k)=avmoyen0/(alphamoyen0*vitessesemoyen);
end
figure (1)
plot(n,C0a0v)
xlabel('exposant n')
ylabel('C0')
title('Variation du coefficient C0 en fonction de l''exposant du
profile de vitesse')

```

Code de programmation des graphiques de  $C_0$  en fonction de  $n$  :

```

clear all
clc
load C0a0
load C0a1
load C0a2
load C0a3
load C0a4
load C0a5
load C0a6
load C0a7
load C0a8

```

```

% figure (10)
% plot(n,C0a0v,'-o',n,C0a1v,'-x',n,C0a2v,':+',n,C0a3v,'--s',n,C0a4v,'-
p',n,C0a5v,'-v',n,C0a6v,'-d',n,C0a7v,':* ',n,C0a8v,'--h')
% xlabel('exposant n')
% ylabel('C0')
% title('Coefficient C0 en fonction de l''exposant du profile de
vitesse pour differents profile de alpha')
%
legend('profile0','profile1','profile2','profile3','profile4','profile5
','profile6','profile7','profile8',9);

figure (11)
plot(n,C0a0v,'-')
xlabel('n')
axis([0.1 0.5 0.8 1.3])

figure (12)
plot(n,C0a1v,'-',n,C0a2v,'--')
xlabel('n')
axis([0.1 0.5 0.8 1.3])
% title('Coefficient C0 en fonction de l''exposant du profile de
vitesse')
% legend('profile1','profile2',2);
%
figure (13)
plot(n,C0a3v,'-',n,C0a4v,'--')
xlabel('n')
axis([0.1 0.5 0.8 1.3])
% ylabel('C0')
% title('Coefficient C0 en fonction de l''exposant du profile de
vitesse')
% legend('profile3','profile4',2);
%
figure (14)
plot(n,C0a5v,'-',n,C0a6v,'--')
xlabel('n')
axis([0.1 0.5 0.8 1.3])
% title('Coefficient C0 en fonction de l''exposant du profile de
vitesse')
% legend('profile5','profile6',2);
%
figure (15)
plot(n,C0a7v,'-',n,C0a8v,'--')
xlabel('n')
axis([0.1 0.5 0.8 1.3])
% ylabel('C0')
% title('Coefficient C0 en fonction de l''exposant du profile de
vitesse')
% legend('profile7','profile8',2);

```

Code de programmation du calcul de l'erreur sur la méthode d'intégration :

```
%ce fichier permet de calculer l'integrale du profile0 paraboloides et de
le
%comparer avec la valeur exacte qui est pi/2 afin de voir quel pas il faut
%choisir pour avoir une erreur acceptable. Un graphe de l'erreur a ete
imprimer
clear all
clc
format long e
prayon=[5*10^-1 3*10^-1 2*10^-1 10^-1 8*10^-2 5*10^-2 2*10^-2 10^-2];
for p=1:length(prayon)
[X,Y]=meshgrid(-1:prayon(p):1,-1:prayon(p):1);
N(p)=abs(X(1,1)-X(1,end))/prayon(p)+1;
F=profile8(-1:prayon(p):1);
alpha=surfparabolique(X,Y,prayon(p),F);

% figure (99)
% mesh(X,Y,alpha)
% axis([-1 1 -1 1 0 1])
% xlabel('x')
% ylabel('y')
% zlabel('alpha')

%integration methode trapeze
sum2=0;
for i=1:N(p)-1
    for j=1:N(p)-1

J(j,i)=prayon(p)^2/4*(alpha(j,i)+alpha(j+1,i)+alpha(j,i+1)+alpha(j+1,i+
1));
%
J2=prayon(p)^2/4*(alpha(j,i)+alpha(j+1,i)+alpha(j,i+1)+alpha(j+1,i+1));
%
sum2=sum2+J2;
    end
end
% for i=2:N-1
%     for j=2:N-1
%
J(i,j)=pas(p)^2/3*(alpha(j+1,i)+alpha(j,i+1)+8*alpha(j,i)+alpha(j-
1,i)+alpha(j,i-1));
%
end
% end
I1=sum(sum(J));
I2=prayon(p)^2*(sum(sum(alpha))-
3/4*(alpha(1,1)+alpha(1,end)+alpha(end,1)+alpha(end,end)))-
```

```

0.5*(sum(alpha(2:end-1,1))+sum(alpha(1,2:end-1))+sum(alpha(end,2:end-1))+sum(alpha(2:end-1,end))));
I3=prayon(p)*trapz(alpha);
Iexact=pi/2;
error(p)=abs(I1-Iexact)/Iexact;
end

figure (101)
semilogy(prayon,error)
xlabel('pas de discretisation')
ylabel('erreur')
title('erreur entre integrale numerique et valeur exacte de l''integrale du paraboloides (profile0)')

```

Code source utilisé pour effectuer les calculs du second article :

Code de programmation des profils de taux de vides :

```

function F0=profile0(y)
format long
F0=1-y.^2;

function F1=profile1(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=0.5
        F1(p)=-4/9*y(p).^2+4/9*y(p)+8/9;
    elseif y(p)>=0.5 & y(p)<=1
        F1(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end

function F2=profile2(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=0.75
        F2(p)=-16/49*y(p).^2+24/49*y(p)+40/49;
    elseif y(p)>=0.75 & y(p)<=1
        F2(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
    end
end

```

```

    end
end

```

```

function F3=profile3(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=sqrt(2)-1
        F3(p)=-4*(2*sqrt(2)-3)*y(p)-4*(2*sqrt(2)-3);
    elseif y(p)>=sqrt(2)-1 & y(p)<=1
        F3(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end
end

```

```

function F4=profile4(y)
format long
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=sqrt(3)-1
        F4(p)=8*(7-4*sqrt(3))*(y(p)+1);
    elseif y(p)>=sqrt(3)-1 & y(p)<=1
        F4(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
    end
end
end

```

```

function F5=profile5(y)
format long
i=-0.6428571429;
j=0.1865433673;
k=0.9107142857;
l=0.25;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=1
        F5(p)=-sqrt(i*y(p)+j)+k;
    elseif y(p)>=1 & y(p)<=1
        F5(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end
end

```

```

function F6=profile6(y)
format long
i=-0.2792727273;
j=0.1684099174;
k=0.6690909091;
l=0.6;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=1
        F6(p)=-sqrt(i*y(p)+j)+k;
    end
end

```



```

elseif y(p)>=1 & y(p)<=1
    F6(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
end
end

```

```

function F7=profile7(y)
format long
a=0.4125687304;
b=2.557647317;
c=-0.03196864229;
g=0.25;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=g
        F7(p)=a*exp(b*y(p))+c;
    elseif y(p)>=g & y(p)<=1
        F7(p)=-4*y(p).^2+4*y(p);
    end
end
end

```

```

function F8=profile8(y)
format long
a=0.007109998068;
b=7.4999539915;
c=-0.000003932610033;
g=0.6;
for p=1:length(y)
    if y(p)>=-1 & y(p)<=g
        F8(p)=a*exp(b*y(p))+c;
    elseif y(p)>=g & y(p)<=1
        F8(p)=-16*y(p).^2+24*y(p)-8;
    end
end
end

```

```

function alpha=surf_void(x,y,pas,F)
%construction de la surface en juxtaposant des paraboles de sommet F(h)
et
%s'annulant sur les bords du cercle
format long
h=-1:pas:1;
%On fait varier h pour pouvoir construire plusieurs parabole (une
parabole
%pour chaque h)
% for i=1:length(h)
%     %calcul des coefficient de la parabole
%     a=-F(i)/(1-h(i)^2);
%     %     b=0;
%     %     c=F(i);

```

```

%      alpha1(i,:)=a*x(1,:).^2+c;%+b*x(1,:); %on juxtapose les paraboles
dont on avait memoriser l'indice k
% %      for j=1:length(x(1,:))
% %          if alpha(i,j)<=0
% %              alpha(i,j)=0; %pour avoir des valeurs nul en dehors du
disque
% %          end
% %      end
% %      end
% end
a=-F./(1-h.^2);
c=F;
[a1]=meshgrid(a);
[c1]=meshgrid(c);
alpha1=a1'.*x.^2+c1';
alpha1(1,:)=0*x(1,:);
alpha1(end,:)=0*x(1,:);
alpha=(alpha1+abs(alpha1))/2;

```

Code de programmation des profils de vitesse du liquide :

```

function sn=surf_vliq(x,y,n)
format long
% rayon=1;
%la subtilité est ke le rapport entre partie réelle et imaginaire de
sn1
%est constant en dehors du cercle et nul a l'interieure
sn=(1-sqrt(x.^2+y.^2)).^(n);
constante=real(sn)./imag(sn);
c=constante(1,1)*ones(length(x(1,:)),length(x(1,:)));
sn=real(sn)-c.*imag(sn);
sn=sn.*(-sign(-sign(sn)-1));

```

Code de programmation des profils de vitesse du gaz :

```

function sgaz=surf_vgaz(xx,yy,Rb,n)
format long
%rayon tube
R=1;

%pas de discretisation
h=10^-3*Rb;

```

```

%coefficient de resistance
Kf=1;

rho=1000;

%vitesse liquide au centre
v10=1;

R1=R-Rb;

%position d'equilibre initiale
x=R1-h/2;

%variation initiale du rayon courant sur la partie superieure de la
bulle
rsup=x:h:R1+Rb;

%variation initiale du rayon courant sur la partie superieure de la
bulle
rinf=R1-Rb+h/2:h:x;

%vitesse initiale liquide sur la partie superieur de la bulle
vlsup=v10*(1-rsup/R).^n;

%vitesse initiale liquide sur la partie inferieur de la bulle
vlinf=v10*(1-rinf/R).^n;

%vitesse initiale du centre de la bulle
vbulle=v10*(1-x/R).^n;

%variation initiale de tetha sur la partie superieure de la bulle
tethasup=real(acos((rsup.^2+R1^2-Rb^2)./(2*rsup*R1)));

%variation initiale de tetha sur la partie inferieure de la bulle
tethainf=real(acos((rinf.^2+R1^2-Rb^2)./(2*rinf*R1)));

%force initiale sur la partie superieure de la bulle
Fsup=2*sum(Kf*rho/2*(vlsup-vbulle).^2.*rsup.*tethasup*h);

%force initiale sur la partie superieure de la bulle
Finf=2*sum(Kf*rho/2*(vlinf-vbulle).^2.*rinf.*tethainf*h);

%tolerance pour arreter l'iteration
tol=0.01;

%Debut de l'iteration
while abs(Fsup-Finf)/abs(Fsup)>=tol
    x=x+h;
    rsup=x:h:R1+Rb;

```

```

rinf=R1-Rb+h/2:h:x;
vlsup=v10*(1-rsup/R).^n;
vlinf=v10*(1-rinf/R).^n;
vbulle=v10*(1-x/R).^n;
tethasup=real(acos((rsup.^2+R1^2-Rb^2)./(2*rsup*R1)));
tethainf=real(acos((rinf.^2+R1^2-Rb^2)./(2*rinf*R1)));

Fsup=2*sum(Kf*rho/2*(vlsup-vbulle).^2.*rsup.*tethasup*h);
Finf=2*sum(Kf*rho/2*(vlinf-vbulle).^2.*rinf.*tethainf*h);
end

sgaz=(1-sqrt(xx.^2+yy.^2)*(1-(vbulle)^(1/n))/(R-Rb)).^n;
% %la subtilité est ke le rapport entre partie réelle et imaginaire de
sgaz
% %est constant en dehors du cercle et nul a linterieure
sutile1=(1-sqrt(xx.^2+yy.^2)).^(n);
constante10=imag(sutile1)./real(sutile1);
constante10(isnan(constante10)) = 0;
constante11=constante10*(vbulle/constante10(1,1));
sutile2=(1-sqrt(xx.^2+yy.^2)/(R-Rb)).^(n);
Rsutile2=real(sutile2);
Isutile2=imag(sutile2);
constante20=Isutile2./Rsutile2;
constante20(isnan(constante20)) = 0;
constante21=sign(constante20);
sgaz2=sgaz.*constante21;
sgaz=sgaz-sgaz2;
sgaz=sgaz+vbulle*constante21;%-(1./Vgaz3)*(Vgaz3(1,1)*vbulle);
sgaz=sgaz-constante11;
sgaz=sgaz.*(-sign(-sign(sgaz)-1));

```

Code de programmation du calcul des paramètres  $\beta/\langle\alpha\rangle$  :

```

function [rapportBetaAlpha]=calcul_betaalpha(alpha0,Rb,pas,F)
n=1/7;
R=1;
section=pi*R^2;

[X,Y]=meshgrid(-1:pas:1,-1:pas:1);
N=abs(X(1,1)-X(1,end))/pas+1;

%profile taux de vide
alpha=alpha0.*surf_void(X,Y,pas,F);

%vitesse liquide adimensionné cad sans v10
v1ad=surf_vliq(X,Y,n);

```

```

j1sansv10=v1ad.*(1-alpha);

%vitesse gaz adimensionné cad sans v10
% v2ad=1.00000000000001*surf_vliq(X,Y,n);
%profile de gaz num utilisé pour les calculs
v2ad=surf_vgaz(X,Y,Rb,n);

j2sansv10=v2ad.*alpha;

%vitesse de melange j
j=j1sansv10+j2sansv10;

jalpha=j.*alpha;

%vitesse relative adimensionné cad sans v10
v21ad=v2ad-v1ad;
j21sansv10=v21ad.*(1-alpha);

%numérateur de PHI1 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v1adim1_aa=j1sansv10.*alpha;

%numérateur de PHI2 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v2adim_aa=j2sansv10.*alpha;

%numérateur de PHI21 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v21adim1_aa=j21sansv10.*alpha;

j1sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j1sansv10))-
3/4*(j1sansv10(1,1)+j1sansv10(1,end)+j1sansv10(end,1)+j1sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j1sansv10(2:end-1,1))+sum(j1sansv10(1,2:end-1))
+sum(j1sansv10(end,2:end-1))+sum(j1sansv10(2:end-1,end))))/section;
j2sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j2sansv10))-
3/4*(j2sansv10(1,1)+j2sansv10(1,end)+j2sansv10(end,1)+j2sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j2sansv10(2:end-1,1))+sum(j2sansv10(1,2:end-1))
+sum(j2sansv10(end,2:end-1))+sum(j2sansv10(2:end-1,end))))/section;
j21sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j21sansv10))-
3/4*(j21sansv10(1,1)+j21sansv10(1,end)+j21sansv10(end,1)+j21sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j21sansv10(2:end-1,1))+sum(j21sansv10(1,2:end-1))
+sum(j21sansv10(end,2:end-1))+sum(j21sansv10(2:end-1,end))))/section;
jalphamoy=pas^2*(sum(sum(jalpha))-
3/4*(jalpha(1,1)+jalpha(1,end)+jalpha(end,1)+jalpha(end,end))-
0.5*(sum(jalpha(2:end-1,1))+sum(jalpha(1,2:end-1))
+sum(jalpha(end,2:end-1))+sum(jalpha(2:end-1,end))))/section;
jsansv10moy=j1sansv10moy+j2sansv10moy;
alphamoy=pas^2*(sum(sum(alpha))-
3/4*(alpha(1,1)+alpha(1,end)+alpha(end,1)+alpha(end,end))-
0.5*(sum(alpha(2:end-1,1))+sum(alpha(1,2:end-1))+sum(alpha(end,2:end-1))
+sum(alpha(2:end-1,end))))/section;

```

```

%numérateur de PHI1 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI1=pas^2*(sum(sum(vladim1_aa))-
3/4*(vladim1_aa(1,1)+vladim1_aa(1,end)+vladim1_aa(end,1)+vladim1_aa(end
,end))-0.5*(sum(vladim1_aa(2:end-1,1))+sum(vladim1_aa(1,2:end-
1))+sum(vladim1_aa(end,2:end-1))+sum(vladim1_aa(2:end-
1,end))))/section;
PHI1=numérateurPHI1/(j1sansv10moy*alphamoy);

%numérateur de PHI2 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI2=pas^2*(sum(sum(v2adim_aa))-
3/4*(v2adim_aa(1,1)+v2adim_aa(1,end)+v2adim_aa(end,1)+v2adim_aa(end,end
))-0.5*(sum(v2adim_aa(2:end-1,1))+sum(v2adim_aa(1,2:end-
1))+sum(v2adim_aa(end,2:end-1))+sum(v2adim_aa(2:end-1,end))))/section;
PHI2=numérateurPHI2/(j2sansv10moy*alphamoy);

%numérateur de PHI21 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI21=pas^2*(sum(sum(v21adim1_aa))-
3/4*(v21adim1_aa(1,1)+v21adim1_aa(1,end)+v21adim1_aa(end,1)+v21adim1_aa
(end,end))-0.5*(sum(v21adim1_aa(2:end-1,1))+sum(v21adim1_aa(1,2:end-
1))+sum(v21adim1_aa(end,2:end-1))+sum(v21adim1_aa(2:end-
1,end))))/section;
PHI21=numérateurPHI21/(j21sansv10moy*alphamoy);

C=PHI1/(1-alphamoy*(PHI2-PHI1));
B=PHI21/PHI1;
D=j21sansv10moy/jsansv10moy;
E=B*D;
rapportBetaAlpha=C*(1+E);

```

Code de programmation du calcul des paramètres  $C, C_0, \tilde{V}_{21}, \overline{V}_{2j}, \beta/\langle\alpha\rangle$  :

```

function [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alpha0,Rb,pas,F)
n=1/7;
R=1;
section=pi*R^2;
[X,Y]=meshgrid(-1:pas:1,-1:pas:1);
N=abs(X(1,1)-X(1,end))/pas+1;
alpha=alpha0.*surf_void(X,Y,pas,F);
% alpha=alpha0.*ones(N,N);

%vitesse liquide adimensionné cad sans v10
vlad=surf_vliq(X,Y,n);
j1sansv10=vlad.*(1-alpha);

```

```

%vitesse gaz adimensionné cad sans v10
% v2ad=1.00000000000001*surf_vliq(X,Y,n);
%profile de gaz num utilisé pour les calculs
v2ad=surf_vgaz(X,Y,Rb,n);
% %essai pour un profile de gaz plus reel
% v2ad=vgaz_essai(X,Y,Rb,n);
j2sansv10=v2ad.*alpha;

%vitesse de melange j
j=j1sansv10+j2sansv10;

%vitesse de derive V2j
V2j=v2ad-j;

jalpha=j.*alpha;

%vitesse relative adimensionné cad sans v10
v21ad=v2ad-v1ad;
j21sansv10=v21ad.*(1-alpha);

%numérateur de PHI1 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v1adim1_aa=j1sansv10.*alpha;

%numérateur de PHI2 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v2adim_aa=j2sansv10.*alpha;

%numérateur de PHI21 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v21adim1_aa=j21sansv10.*alpha;

j1sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j1sansv10))-
3/4*(j1sansv10(1,1)+j1sansv10(1,end)+j1sansv10(end,1)+j1sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j1sansv10(2:end-1,1))+sum(j1sansv10(1,2:end-1))
)+sum(j1sansv10(end,2:end-1))+sum(j1sansv10(2:end-1,end)))/section;
j2sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j2sansv10))-
3/4*(j2sansv10(1,1)+j2sansv10(1,end)+j2sansv10(end,1)+j2sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j2sansv10(2:end-1,1))+sum(j2sansv10(1,2:end-1))
)+sum(j2sansv10(end,2:end-1))+sum(j2sansv10(2:end-1,end)))/section;
j21sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j21sansv10))-
3/4*(j21sansv10(1,1)+j21sansv10(1,end)+j21sansv10(end,1)+j21sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j21sansv10(2:end-1,1))+sum(j21sansv10(1,2:end-1))
)+sum(j21sansv10(end,2:end-1))+sum(j21sansv10(2:end-1,end)))/section;
jalphamoy=pas^2*(sum(sum(jalpha))-
3/4*(jalpha(1,1)+jalpha(1,end)+jalpha(end,1)+jalpha(end,end))-
0.5*(sum(jalpha(2:end-1,1))+sum(jalpha(1,2:end-1))
)+sum(jalpha(end,2:end-1))+sum(jalpha(2:end-1,end)))/section;
jsansv10moy=j1sansv10moy+j2sansv10moy;

```

```

alphamoy=pas^2*(sum(sum(alpha))-
3/4*(alpha(1,1)+alpha(1,end)+alpha(end,1)+alpha(end,end))-
0.5*(sum(alpha(2:end-1,1))+sum(alpha(1,2:end-1))+sum(alpha(end,2:end-
1))+sum(alpha(2:end-1,end))))/section;
% jsansv10moy=jlansv10moy+j2sansv10moy;
% v10=jl1moy/jlansv10moy;
% v1=v10*v1ad;
% v2=v10*v2ad;
% v21=v10*v21ad;

%numérateur de PHI1 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI1=pas^2*(sum(sum(vladim1_aa))-
3/4*(vladim1_aa(1,1)+vladim1_aa(1,end)+vladim1_aa(end,1)+vladim1_aa(end
,end))-0.5*(sum(vladim1_aa(2:end-1,1))+sum(vladim1_aa(1,2:end-
1))+sum(vladim1_aa(end,2:end-1))+sum(vladim1_aa(2:end-
1,end))))/section;
PHI1=numérateurPHI1/(jlansv10moy*alphamoy);

%numérateur de PHI2 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI2=pas^2*(sum(sum(v2adim_aa))-
3/4*(v2adim_aa(1,1)+v2adim_aa(1,end)+v2adim_aa(end,1)+v2adim_aa(end,end
))-0.5*(sum(v2adim_aa(2:end-1,1))+sum(v2adim_aa(1,2:end-
1))+sum(v2adim_aa(end,2:end-1))+sum(v2adim_aa(2:end-1,end))))/section;
PHI2=numérateurPHI2/(j2sansv10moy*alphamoy);

%numérateur de PHI21 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI21=pas^2*(sum(sum(v21adim1_aa))-
3/4*(v21adim1_aa(1,1)+v21adim1_aa(1,end)+v21adim1_aa(end,1)+v21adim1_aa
(end,end))-0.5*(sum(v21adim1_aa(2:end-1,1))+sum(v21adim1_aa(1,2:end-
1))+sum(v21adim1_aa(end,2:end-1))+sum(v21adim1_aa(2:end-
1,end))))/section;
PHI21=numérateurPHI21/(j21sansv10moy*alphamoy);

C=PHI1/(1-alphamoy*(PHI2-PHI1));
B=PHI21/PHI1;
D=j21sansv10moy/jsansv10moy;
E=B*D;
rapportBetaAlpha=C*(1+E);

% Co de Zuber and Findlay
C0=jalphamoy/(jsansv10moy*alphamoy);

%V2j pondéré de Zuber and Findlay
jexp=5.5; %m/s pour comparer avec graphique sur article
V2jpond=jexp*(rapportBetaAlpha-C0);

```



Code de programmation de  $C$  lorsque le glissement est négligé :

```
function [C]=calculC_sansglissement(alpha0,pas,F)
n=1/7;
R=1;
section=pi*R^2;

[X,Y]=meshgrid(-1:pas:1,-1:pas:1);
N=abs(X(1,1)-X(1,end))/pas+1;

%profile de taux de vide
alpha=alpha0.*surf_void(X,Y,pas,F);

%vitesse liquide adimensionné cad sans v10
v1ad=surf_vliq(X,Y,n);
j1sansv10=v1ad.*(1-alpha);

%vitesse gaz adimensionné egale au liquide
v2ad=1.0000000000001*surf_vliq(X,Y,n);

j2sansv10=v2ad.*alpha;

%vitesse de melange j
j=j1sansv10+j2sansv10;

jalpha=j.*alpha;

%numérateur de PHI1 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
vladim1_aa=j1sansv10.*alpha;

%numérateur de PHI2 sans moyenné et adimensionnelle en vitesse
v2adim_aa=j2sansv10.*alpha;

j1sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j1sansv10))-
3/4*(j1sansv10(1,1)+j1sansv10(1,end)+j1sansv10(end,1)+j1sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j1sansv10(2:end-1,1))+sum(j1sansv10(1,2:end-1))+sum(j1sansv10(end,2:end-1))+sum(j1sansv10(2:end-1,end))))/section;
j2sansv10moy=pas^2*(sum(sum(j2sansv10))-
3/4*(j2sansv10(1,1)+j2sansv10(1,end)+j2sansv10(end,1)+j2sansv10(end,end))
)-0.5*(sum(j2sansv10(2:end-1,1))+sum(j2sansv10(1,2:end-1))+sum(j2sansv10(end,2:end-1))+sum(j2sansv10(2:end-1,end))))/section;
jalphamoy=pas^2*(sum(sum(jalpha))-
3/4*(jalpha(1,1)+jalpha(1,end)+jalpha(end,1)+jalpha(end,end))-
0.5*(sum(jalpha(2:end-1,1))+sum(jalpha(1,2:end-1))+sum(jalpha(end,2:end-1))+sum(jalpha(2:end-1,end))))/section;
```

```

jsansv10moy=j1sansv10moy+j2sansv10moy;
alphamoy=pas^2*(sum(sum(alpha))-
3/4*(alpha(1,1)+alpha(1,end)+alpha(end,1)+alpha(end,end))-
0.5*(sum(alpha(2:end-1,1))+sum(alpha(1,2:end-1))+sum(alpha(end,2:end-
1))+sum(alpha(2:end-1,end))))/section;

%numérateur de PHI1 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI1=pas^2*(sum(sum(vladim1_aa))-
3/4*(vladim1_aa(1,1)+vladim1_aa(1,end)+vladim1_aa(end,1)+vladim1_aa(end
,end))-0.5*(sum(vladim1_aa(2:end-1,1))+sum(vladim1_aa(1,2:end-
1))+sum(vladim1_aa(end,2:end-1))+sum(vladim1_aa(2:end-
1,end))))/section;
PHI1=numérateurPHI1/(j1sansv10moy*alphamoy);

%numérateur de PHI2 adimensionnelle en vitesse
numérateurPHI2=pas^2*(sum(sum(v2adim_aa))-
3/4*(v2adim_aa(1,1)+v2adim_aa(1,end)+v2adim_aa(end,1)+v2adim_aa(end,end
))-0.5*(sum(v2adim_aa(2:end-1,1))+sum(v2adim_aa(1,2:end-
1))+sum(v2adim_aa(end,2:end-1))+sum(v2adim_aa(2:end-1,end))))/section;
PHI2=numérateurPHI2/(j2sansv10moy*alphamoy);

C=PHI1/(1-alphamoy*(PHI2-PHI1));

```

Code de programmation du tracé des paramètres :

```

clear all
clc

alpha0=[0.1 0.25 0.35 0.5];
Rb=[0.02 0.05 0.1];
%pas de maillage
pas=1*10^-3;
%choix du profile
F=profile8(-1:pas:1);

for j=1:length(Rb)
tic
    for i=1:length(alpha0)
        [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v2lad
X]=calculC_B_betaalpha(alpha0(i),Rb(j),pas,F);
        r(i,j)=rapportBetaAlpha;
        CC(i,j)=C;
        CC0(i,j)=C0;
    end
end

```

```

        EE(i,j)=E;
        VV2jpond(i,j)=V2jpond;
        Amoy(i,j)=alphamoy;
        v21{j}=v21ad;
    end
j
toc
end
%
% save 'resultat_traceprof8vg2' Amoy r CC EE
% toc

figure (1)
plot(Amoy(:,1),r(:,1),'b',Amoy(:,2),r(:,2),'--g',Amoy(:,3),r(:,3),'-
.r');
xlim([0 0.3])

figure (2)
plot(Amoy(:,1),CC(:,1),'b',Amoy(:,2),CC(:,2),'--
g',Amoy(:,3),CC(:,3),'- .r');
xlim([0 0.3])

figure (5)
plot(Amoy(:,1),EE(:,1),'b',Amoy(:,2),EE(:,2),'--
g',Amoy(:,3),EE(:,3),'- .r');
xlim([0 0.3])

figure (6)
plot(Amoy(:,1),CC(:,2),'b',Amoy(:,1),CC0(:,2),'-k');
xlim([0 0.203])
ylim([0.981 1.08])

%Parametre du Model Zuber and Findlay
figure (7)
plot(Amoy(:,3),CC0(:,3),'-k');
figure (8)
plot(Amoy(:,3),VV2jpond(:,3),'-k');

N=abs(X(1,1)-X(1,end))/pas+1;
figure (100)
plot(X(N-(N-1)/2,:),v21{1}(N-(N-1)/2,:),'b',X(N-(N-1)/2,:),v21{2}(N-
(N-1)/2,:),'--g',X(N-(N-1)/2,:),v21{3}(N-(N-1)/2,:),'- .r')
xlim([-1 -0.85])

```



```

Integrale_alphaad(1)=pas^2*(sum(sum(alphaad1))-
3/4*(alphaad1(1,1)+alphaad1(1,end)+alphaad1(end,1)+alphaad1(end,end))-
0.5*(sum(alphaad1(2:end-1,1))+sum(alphaad1(1,2:end-
1))+sum(alphaad1(end,2:end-1))+sum(alphaad1(2:end-1,end))));
Integrale_alphaad(2)=pas^2*(sum(sum(alphaad2a))-
3/4*(alphaad2a(1,1)+alphaad2a(1,end)+alphaad2a(end,1)+alphaad2a(end,end
))-0.5*(sum(alphaad2a(2:end-1,1))+sum(alphaad2a(1,2:end-
1))+sum(alphaad2a(end,2:end-1))+sum(alphaad2a(2:end-1,end))));
Integrale_alphaad(3)=pas^2*(sum(sum(alphaad3a))-
3/4*(alphaad3a(1,1)+alphaad3a(1,end)+alphaad3a(end,1)+alphaad3a(end,end
))-0.5*(sum(alphaad3a(2:end-1,1))+sum(alphaad3a(1,2:end-
1))+sum(alphaad3a(end,2:end-1))+sum(alphaad3a(2:end-1,end))));
Integrale_alphaad(4)=pas^2*(sum(sum(alphaad5a))-
3/4*(alphaad5a(1,1)+alphaad5a(1,end)+alphaad5a(end,1)+alphaad5a(end,end
))-0.5*(sum(alphaad5a(2:end-1,1))+sum(alphaad5a(1,2:end-
1))+sum(alphaad5a(end,2:end-1))+sum(alphaad5a(2:end-1,end))));
Integrale_alphaad(5)=pas^2*(sum(sum(alphaad5b))-
3/4*(alphaad5b(1,1)+alphaad5b(1,end)+alphaad5b(end,1)+alphaad5b(end,end
))-0.5*(sum(alphaad5b(2:end-1,1))+sum(alphaad5b(1,2:end-
1))+sum(alphaad5b(end,2:end-1))+sum(alphaad5b(2:end-1,end))));

for i=1:5
    alphamax(i)=alphamoy(i)*section/Integrale_alphaad(i);
    alphamax_init(i)=alphamax(i);
end
erreurl=1;
while erreurl>=1e-4;
    [r]=calcul_betaalpha(alphamax(1),Rb,pas,F1);
    alphamoy(1)=beta0/r;
    alphamax_new(1)=alphamoy(1)*section/Integrale_alphaad(1);
    erreurl=abs(alphamax_new(1)-alphamax(1))/alphamax(1);
    alphamax(1)=alphamax_new(1);
end
erreurl2=1;
while erreurl2>=1e-4;
    [r]=calcul_betaalpha(alphamax(2),Rb,pas,F2a);
    alphamoy(2)=beta0/r;
    alphamax_new(2)=alphamoy(2)*section/Integrale_alphaad(2);
    erreurl2=abs(alphamax_new(2)-alphamax(2))/alphamax(2);
    alphamax(2)=alphamax_new(2);
end
erreurl3=1;
while erreurl3>=1e-4;
    [r]=calcul_betaalpha(alphamax(3),Rb,pas,F3a);
    alphamoy(3)=beta0/r;
    alphamax_new(3)=alphamoy(3)*section/Integrale_alphaad(3);
    erreurl3=abs(alphamax_new(3)-alphamax(3))/alphamax(3);
    alphamax(3)=alphamax_new(3);
end
erreurl4=1;
while erreurl4>=1e-4;

```

```

[r]=calcul_betaalpha(alphamax(4),Rb,pas,F5a);
alphamoy(4)=beta0/r;
alphamax_new(4)=alphamoy(4)*section/Integrale_alphaad(4);
erreur4=abs(alphamax_new(4)-alphamax(4))/alphamax(4);
alphamax(4)=alphamax_new(4);
end
erreur5=1;
while erreur5>=1e-4;
[r]=calcul_betaalpha(alphamax(5),Rb,pas,F5b);
alphamoy(5)=beta0/r;
alphamax_new(5)=alphamoy(5)*section/Integrale_alphaad(5);
erreur5=abs(alphamax_new(5)-alphamax(5))/alphamax(5);
alphamax(5)=alphamax_new(5);
end

% %verification
% [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alphamax(1),Rb,pas,F1);
% beta(1)=rapportBetaAlpha*alphamoy;
% [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alphamax(2),Rb,pas,F2a);
% beta(2)=rapportBetaAlpha*alphamoy;
% [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alphamax(3),Rb,pas,F3a);
% beta(3)=rapportBetaAlpha*alphamoy;
% [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alphamax(4),Rb,pas,F5a);
% beta(4)=rapportBetaAlpha*alphamoy;
% [rapportBetaAlpha C C0 B D E V2jpond alphamoy v21ad
X]=calculC_B_betaalpha(alphamax(5),Rb,pas,F5b);
% beta(5)=rapportBetaAlpha*alphamoy;

[r1]=calcul_betaalpha(alphamax(1),Rb,pas,F1);
[r2a]=calcul_betaalpha(alphamax(2),Rb,pas,F2a);
[r3a]=calcul_betaalpha(alphamax(3),Rb,pas,F3a);
[r5a]=calcul_betaalpha(alphamax(4),Rb,pas,F5a);
[r5b]=calcul_betaalpha(alphamax(5),Rb,pas,F5b);

toc

x=0:0.01:1;
z=[0 0.25 0.5 0.75 1];
%equation d'approximation du rapport beta/alpha 1: pas de glissement
p1=-0.18216;
p2=0;
p3=0.11158;
p4=0;
p5=0.0018927;

```

```

p6=-0.026178;
p7=1.0784;
y1=p1*x.^6+p2*x.^5+p3*x.^4+p4*x.^3+p5*x.^2+p6*x+p7;

%equation d'approximation du rapport beta/alpha 2: avec glissement
q1=-0.18857;
q2=0;
q3=0.11568;
q4=0;
q5=0.0018403;
q6=-0.027016;
q7=1.0748;
y2=q1*x.^6+q2*x.^5+q3*x.^4+q4*x.^3+q5*x.^2+q6*x+q7;

figure (1)
plot(z,[C1 C2a C3a C5a C5b], '--b',z,[r1 r2a r3a r5a r5b], '-r')

figure (2)
plot(x,y2, '-b')

```

## ANNEXE II

Documents afférents à la publication de l'article :

« INFLUENCE OF THE VOID FRACTION PROFILE ON THE  
DISTRIBUTION PARAMETER  $C_0$  FOR A BUBBLY GAS-LIQUID  
FLOW IN A HORIZONTAL ROUND PIPE »

Lakdar Haoues, Andrei Olekhnovitch, Alberto Teyssedou

*Nuclear Engineering and Design (vol.238, p.1155-1158)*



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

ScienceDirect

Nuclear Engineering and Design 238 (2008) 1155–1158

**Nuclear  
Engineering  
and Design**
[www.elsevier.com/locate/nucengdes](http://www.elsevier.com/locate/nucengdes)

## Influence of the void fraction profile on the distribution parameter $C_0$ for a bubbly gas–liquid flow in a horizontal round pipe

L. Haoues, A. Olekhnovitch\*, A. Teyssedou

*Institut de Génie Nucléaire, Département de Génie Physique, École Polytechnique, C.P. 6079,  
Succ. Centre-ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7*

Received 23 July 2007; received in revised form 20 September 2007; accepted 24 September 2007

### Abstract

This paper presents the results of a numerical experiment on the influence of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  in a horizontal bubbly two-phase flow. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles, which occur normally in horizontal flows, the distribution parameter may be less than 1. In this case, the ratio of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  can also be less than 1.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

Multiphase flows occur in multiple industrial applications and they are commonly encountered in chemical and heat transfer processes. Within the context of petroleum industries, for instance, the engineers often have to deal with two-phase gas–oil flows. This type of flow requires an accurate sizing of equipment for gathering, pumping, transporting and storing such two-phase mixtures. In the transport pipeline segments, the correct prediction of the void fraction  $\alpha$  is essential to obtain the optimal production and transportation rates of the oil and the gas for avoiding problems such as pump cavitations, excessive pressure losses, etc. On the other hand, the two-phase flows are widely presented in many other engineering fields, e.g., heat transfer equipments, nuclear power steam generators and boiling nuclear power reactors. In this case, the knowledge of two-phase flow parameters is of a great importance not only for the optimisation and the increase in efficiency of such installations, but also for their safe operation.

The prediction of two-phase flow parameters unconditionally requires a detailed information about the internal flow structure, the local and average void fractions as well as the phase velocity distributions in the channel cross-section. Actually, the majority of methods and/or correlations developed to predict the aver-

age void fraction are based on the drift flux model proposed by Zuber and Findlay (1965). Within the framework of this model, the ratio of the volumetric flow quality  $\beta = Q_2/(Q_1 + Q_2)$  to the average void fraction  $\langle\alpha\rangle$  can be written as

$$\frac{\beta}{\langle\alpha\rangle} = C_0 + \frac{\langle\alpha V_{2j}\rangle}{\langle\alpha\rangle\langle j\rangle}, \quad (1)$$

where the distribution parameter  $C_0$  has the following form:

$$C_0 = \frac{\langle\alpha j\rangle}{\langle\alpha\rangle\langle j\rangle} = \frac{1/A \int_A \alpha j dA}{[(1/A) \int_A \alpha dA] [(1/A) \int_A j dA]}, \quad (2)$$

and the drift velocity of the gas  $V_{2j}$  is defined as:

$$V_{2j} = v_2 - j, \quad (3)$$

where  $j = v_1(1 - \alpha) + v_2\alpha$  is the volumetric flux density of the mixture,  $v_1$  and  $v_2$  the actual velocities of the liquid and the gas phase, respectively, and  $A$  is the duct cross-sectional area.

This model takes into account both the effect of non-uniform flow and concentration profiles (distribution parameter  $C_0$ ) as well as the effect of the local relative velocity between the phases (drift velocity  $V_{2j}$ ). Zuber and Findlay (1965) had investigated the effects of non-uniform flow and concentration distributions on the value of the parameter  $C_0$  for vertical, axially symmetric flows through a circular duct. Different power law flow and void fraction distributions were assumed and it was shown that the value of  $C_0$  might vary from 1.0, when the distribution of the void fraction or the velocity is uniform across the duct, to about

\* Corresponding author. Tel.: +1 514 340 4711x5976; fax: +1 514 340 4192.  
E-mail address: [andrei.olekhnovitch@polymtl.ca](mailto:andrei.olekhnovitch@polymtl.ca) (A. Olekhnovitch).

Nomenclature	
$A$	duct cross sectional area
$C_0$	distribution parameter
$f$	friction factor
$j$	volumetric flux density
$n$	exponent
$Q$	volumetric flow rate
$r$	radial coordinate
$R$	pipe radius
$v$	velocity
$v_{2j}$	gas drift velocity
Greek letters	
$\alpha$	void fraction
$\beta$	volumetric flow quality
Subscripts	
1	liquid
2	gas

1.5, when the void fraction has a quite pronounced maximum at the center of the pipe. Therefore, if for a specific flow regime the void fraction distribution and the phase relative velocity can be predicted or, at least, evaluated, the average void fraction can be determined.

However, in the case of horizontal flows, the migration of bubbles towards the top of the pipe, due to buoyancy, causes a quite non-symmetric void fraction distribution within the pipe cross-section. Fig. 1 shows typical void fraction profiles which are characteristic for a bubbly gas–liquid horizontal flow (Andreussi et al., 1999). It is clear that the power law profiles which were used by Zuber and Findlay (1965) for their analysis cannot be applied for such void fraction distributions. Moreover, for large diameter pipes and small-size bubbles it may happen that the maximum void fraction will take place in the immediate vicinity of the wall where the local liquid velocity is lower than its average value. Under these conditions, one can presume a considerable decreasing of the value of the distribution parameter  $C_0$ .

The experiments perfectly confirm this rather qualitative conclusion. For example, Kocamustafaogullari et al. (1994) have shown that for air–water bubbly flows through a horizontal pipe of 50.3 mm internal diameter the average value of  $C_0$  is 0.986, and it can be as low as 0.82. It must be noted that in this study the distribution parameter  $C_0$  was determined graphically by using the following expression derived from Eq. (1):

$$\bar{v}_2 = \frac{\langle j_2 \rangle}{\langle \alpha \rangle} = C_0 \langle j \rangle + \frac{\langle \alpha v_{2j} \rangle}{\langle \alpha \rangle}, \quad (4)$$

where  $\bar{v}_2$  is the weighted mean velocity of the gas phase. It can be seen that by plotting the weighted mean velocity  $\bar{v}_2$  versus the average volumetric flux density  $\langle j \rangle$  of the mixture, the distribution parameter  $C_0$  is simply the slope of the corresponding line. Thus, Eq. (4) is in reality another practical representation of the drift flux model.

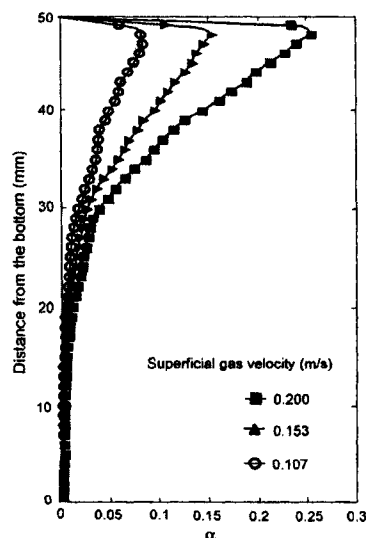


Fig. 1. Local void fraction profiles in a horizontal two-phase flow (Andreussi et al., 1999).

Beattie (1996) raised, however, some doubts about the possibility for  $C_0$  to be less than 1. Based on his own mixing length theory (Beattie, 1972), he tried to demonstrate that for the void fraction profiles presented by Kocamustafaogullari et al. (1994),  $C_0$  must be always slightly greater than unity.

In view of the above discussion, it is evident that the most appropriate manner to evaluate the distribution parameter  $C_0$  is to return to its definition (Eq. (2)). Thus, the principal goal of the present work is to estimate the influence of different types of void fraction profiles on the distribution parameter for horizontal two-phase flows.

## 2. Influence of the void fraction profile on the distribution parameter $C_0$ for a gas–liquid flow in a horizontal round pipe

Whatever the initial void fraction profile is (even if it is uniform), due to the bubble migration towards the top of the horizontal channel, different profiles can occur along the pipe. In order to provide a coherent representation of the real structure of horizontal dispersed bubbly flows, nine typical void fraction profiles have been chosen; these profiles are shown in Fig. 2. For their mathematical description, several polynomials were used. However, even though the profiles 2–5 were generated by using the same mathematical functions, in order to obtain different locations of the maximum void fraction ( $r/R=0.5$  for profiles (a) and  $r/R=0.75$  for profiles (b)), for a given set of functions their coefficients were adjusted. Note that the symmetric

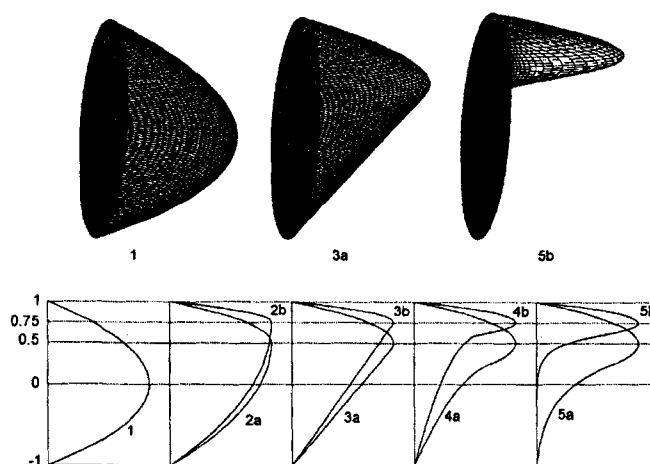


Fig. 2. Typical void fraction profiles.

parabolic profile (profile 1) was considered for comparing the values of  $C_0$  for vertical and horizontal flows as well as to verify the results of the numerical integration with the exact analytical solution.

For a fully developed, horizontal bubbly two-phase flow, there are no evidential reasons for the slip between phases to occur, because the gravitational force is normal to the flow direction, which can only provoke a characteristic buoyancy-skewed void fraction profile to develop. Further, any direct contact between the gas phase with the channel wall, which in the case of a stratified flow can provoke a certain alteration of its velocity, is not considered in the present work. Therefore, for the liquid and the gas phase velocities, it was supposed that there is no slip between the phases; thus

$$v_1 \approx v_2 \approx j, \quad (5)$$

$$\langle \alpha V_{2j} \rangle \approx 0, \quad (6)$$

and

$$\frac{\beta}{\langle \alpha \rangle} \approx \frac{\langle \alpha j \rangle}{\langle \alpha \rangle \langle j \rangle} = C_0. \quad (7)$$

For the description of the velocity distribution, the following power law profile was used:

$$j \propto \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n. \quad (8)$$

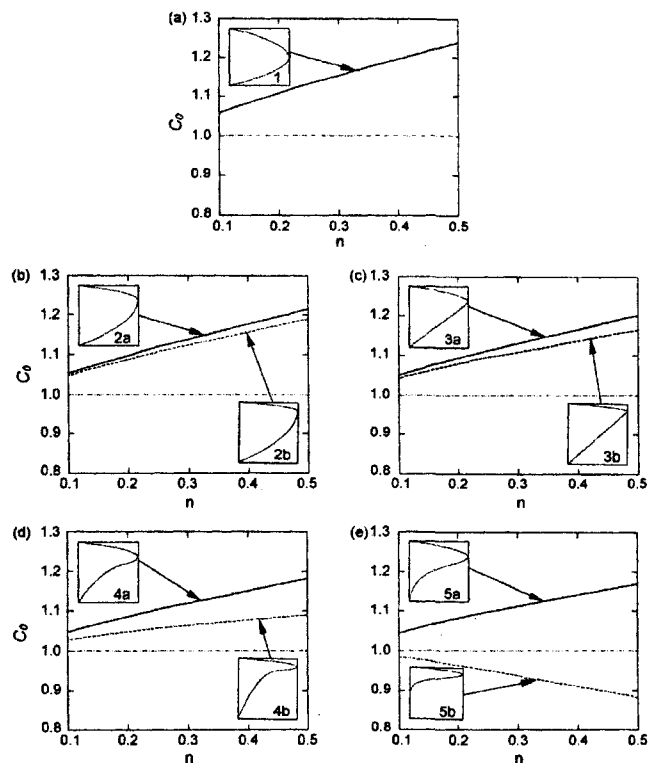
The assumptions (5)–(8) were formulated according with the study carried out by Kocamustafaogullari and Huang (1994). These authors have shown that the measured bubble interface velocity profiles are very close to the  $1/7$ th power law turbulent flow ones. It also must be noted that Kocamustafaogullari and

Huang (1994) have observed that the predicted liquid velocities are always slightly greater than the bubble interface velocities. However, taking into account a rather general and qualitative character of the present study, this observation was not considered here. Contrarily, for increasing the range of applicability of the analysis, the value of the exponent  $n$  has been varied between  $1/10$  and  $1/2$ . Thus, the whole range of possible flows, from laminar or rather pseudo-laminar ( $n = 1/2$ ) to fully developed turbulent flow, was examined.

The values of the distribution parameter were determined using Eq. (2) and a trapezoidal numerical integration method. The comparison of the values obtained for a parabolic void fraction profile (profile 1 in Fig. 2) with the corresponding exact analytical solutions shows that the absolute error of the used method does not exceed  $10^{-5}$ .

Fig. 3 shows the distribution parameter  $C_0$  as a function of the exponent  $n$ . It can be seen that for more or less symmetric void fraction profiles,  $C_0$  is greater than 1. However, for the case of the void fraction distribution with a clearly pronounced maximum near the top pipe wall, the value of  $C_0$  is always less than 1 (profile 5b in Fig. 3e). It is interesting to note that these values are characteristic for a void fraction profile with the maximum that takes place at  $r/R = 0.75$ . This fact confirms the experimental results of Kocamustafaogullari et al. (1994) (i.e.,  $C_0 = 0.82$ – $0.99$ ) obtained for horizontal bubbly flows with the void fraction maximums located at  $r/R = 0.8$ – $0.9$ .

Thus, the study that was carried out in the present work clearly shows that for horizontal bubbly flows, the value of the distribution parameter  $C_0$  can be close to 1 and even less than 1. This conclusion must be taken into consideration for analysing horizontal two-phase flows.

Fig. 3.  $C_0$  as a function of  $n$ .

### 3. Conclusions

A numerical experiment on the effect of the void fraction profile on the distribution parameter  $C_0$  in horizontal two-phase flows was carried out. The value of the distribution parameter  $C_0$  was calculated using a trapezoidal numerical integration method for different void fraction and velocity profiles. It was shown that for non-symmetric void fraction profiles with a pronounced maximum near the top pipe wall, the value of the distribution parameter and consequently the value of the ratio of the volumetric flow quality  $\beta$  to the average void fraction ( $\alpha$ ) can be less than 1.

### Acknowledgements

This work was funded by the Hydro-Québec chair in nuclear engineering and the National Science and Engineer-

ing Research Council of Canada (NSERC) discovery grant # 341896-07.

### References

- Andreussi, P., Paglianti, A., Silva, F.S., 1999. Dispersed bubble flow in horizontal pipes. *Chem. Eng. Sci.* 54, 1101–1107.
- Beattie, D.R.H., 1972. Two-phase flow structure and mixing length theory. *Nucl. Eng. Des.* 14, 46–64.
- Beattie, D.R.H., 1996. Flow characteristics of horizontal bubbly pipe flow. *Nucl. Eng. Des.* 163, 207–212.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., 1994. Internal structure and interfacial velocity development for bubbly two-phase flow. *Nucl. Eng. Des.* 151, 79–101.
- Kocamustafaogullari, G., Huang, W.D., Razi, J., 1994. Measurement and modeling of average void fraction, bubble size and interfacial area. *Nucl. Eng. Des.* 148, 437–453.
- Zuber, N., Findlay, J.A., 1965. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *Trans. ASME, J. Heat Transf.* 87, 453–468.

## ANNEXE III

Documents afférents à la soumission de l'article :

« NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE  
INTERNAL STRUCTURE OF A HORIZONTAL BUBBLY FLOW ON  
THE AVERAGE VOID FRACTION »

Lakdar Haoues, Andrei Olekhnovitch, Alberto Teyssedou

*Submitted to: Nuclear Engineering and Design (April 24, 2008)*

Courrier :: INBOX: Fwd: A manuscript number has been assigned: NED-D-08-00078 Page 1 of 1

Quota: 91,21 MB / 100,00 MB (91,21%)

Date: Tue, 27 May 2008 17:04:25 -0400

De: Andrei Olekhnovitch <andrei.olekhnovitch@polymtl.ca>

À: "lakdar.haoues@polymtl.ca" <lakdar.haoues@polymtl.ca>

Objet: Fwd: A manuscript number has been assigned: NED-D-08-00078

----- Forwarded message from Nuclear Engineering and Design <ned@elsevier.com>

Date: 24 Apr 2008 08:52:31 +0100  
 From: Nuclear Engineering and Design <ned@elsevier.com>  
 Reply-To: Nuclear Engineering and Design <ned@elsevier.com>  
 Subject: A manuscript number has been assigned: NED-D-08-00078  
 To: "andrei.olekhnovitch@polymtl.ca" <andrei.olekhnovitch@polymtl.ca>

Ms. Ref. No.: NED-D-08-00078

Title: Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction  
 Nuclear Engineering and Design

Dear Professor Andrei Olekhnovitch,

Your submission "Numerical study of the influence of the internal structure of a horizontal bubbly flow on the average void fraction" has been assigned manuscript number NED-D-08-00078.

To track the status of your paper, please do the following:

1. Go to this URL: <http://ees.elsevier.com/ned/>
2. Enter your login details
3. Click [Author Login]  
 This takes you to the Author Main Menu.
4. Click [Submissions Being Processed]

Thank you for submitting your work to Nuclear Engineering and Design.

Kind regards,

Fiona Healy  
 Journal Manager  
 Nuclear Engineering and Design

\*\*\*\*\*

Please note that the editorial process varies considerably from journal to journal. To view a sample editorial process, please click here:  
[http://ees.elsevier.com/eeshelp/sample\\_editorial\\_process.pdf](http://ees.elsevier.com/eeshelp/sample_editorial_process.pdf)

For any technical queries about using EES, please contact Elsevier Author Support at [authorsupport@elsevier.com](mailto:authorsupport@elsevier.com)  
 Global telephone support is available 24/7:  
 For The Americas: +1 888 834 7287 (toll-free for US & Canadian customers)  
 For Asia & Pacific: +81 3 5561 5032  
 For Europe & rest of the world: +353 61 709190

----- End forwarded message -----